空間充填曲線とフラクタル

著者■H.ザーガン
訳者■鎌田清一郎

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

Illustration Credits

The photograph of George Cantor on p. 7 is from the files of the Mathematical Intelligencer and reproduced here by permission from Springer-Verlag New York. The photo of Hans Hahn on p. 106 is from the Fotoarchiv, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, and reprinted with their permission. The photograph of David Hilbert on p. 11 appeared in *The Pólya Picture Album* (Birkhäuser-Basel, 1987) and is reproduced here with the publisher's permission. The photo of Konrad Knopp on p. 69 comes from the Fotoarchiv, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach and is reproduced with their permission. The photo of Henri L. Lebesgue on p. 95 appeared in his *Oeuvres Scientifiques, Vol. I* and is reproduced with permission from the publishers, the Institut de Mathématiques, Université de Genève. The photo of Stefan Mazurkiewicz on p. 107 appeared in his *Travaux de Topologie et ses Applications*, published by PWN (Polish Scientific Publishers) in 1969, and is reproduced here with permission from the publishers. The photo of Eliakim H. Moore on p. 30 comes from the files of the Mathematical Intelligencer and is reproduced with the permission from Springer-Verlag New York. The photo of Eugen Netto on p. 8, which was given to the author by K. Jacobs from the University of Erlangen-Nürnberg, appeared in the special edition of *Acta Mathematica 1882–1912*, table générale des Tomes 1–35, and appears here with the permission of Arne Jensen of the Institut Mittag Leffler. The photo of William F. Osgood on p. 168 appeared in the Secretary's Report No. VII to the Class of 1886, Harvard College, 1911, and is reprinted here by permission from the Harvard University Office of News and Public Affairs. The photo of Giuseppe Peano on p. 39 was sent to the author from the Fotoarchiv Forschungsinstitut Oberwolfach. It appeared in *Bibliotheca Mathematica*, published by Umberto Allemandi & Co., and is reprinted here by permission from the publisher. The photo of George Pólya on p. 77 comes from the private collection of Andrew Lenard at Indiana University and is reprinted here with his permission. The photo of Isaac J. Schoenberg on p. 149 appeared in *The Pólya Picture Album* and is reproduced here by permission from Birkhäuser-Basel. The photo of Waclaw Sierpiński on p. 61 appeared in his *Oeuvres Choisies, Vol. 2*, published by PWN (Polish Scientific Publishers) in 1975 and is reprinted here with permission from the publishers. The photo of Walter Wunderlich on p. 55 comes from his private collection and is reproduced here with his permission.

Figure 2.1.1 on p. 13 is a facsimile of a figure that appeared in the Mathematische Annalen 38 (1891), p. 459, and is reproduced here with permission from Springer-Verlag Heidelberg. Figure 2.1.2 on p. 14 is from K. Strubecker's *Einführung in the höhere Mathematik, II*, p. 698, and is reproduced here by permission from R. Oldenbourg, München-Wien. Figure 9.5.2 on p. 206 is a reproduction from p. 502 of *Studies in Geometry* by L.M. Blumenthal and K. Menger, and is reproduced here by permission from the publishers, W.H. Freeman & Co., New York. Figure 9.6.3 on p. 210 is a facsimile of Fig. 4 in *Number Representations and Dragon Curves I* by Chandler Davis and Donald E. Knuth, J. Recreational Math. 3 (1970), p. 69, and is reproduced here by permission from the authors.

著者まえがき

空間充填曲線は，1 世紀以上にわたって数学者を魅了しており，数学を志す多くの学生に興味を持たれてきた．この分野での研究は,「理性の縁 (edge of reason)」でスケートをしているようなものである．不幸にして，この分野は，1912 年のシェルピンスキーによる勇敢な努力の他には，理解ある扱いがなされていないのである．当時，この主題がまだ初期の段階であったため，大いに関心が寄せられた反面，混乱も生じた．一方，シェルピンスキーの論文は，ポーランド語で書かれており，掲載された論文は，簡単には手に入らない (Sierpiński[2])．この主題に関する初期の論文のほとんどは，仏語，独語，ポーランド語で書かれている．これらは，特別な**存在理由** (raison d'être) があったため，英語での理解ある扱いを受けた．次第に理解されるにつれ，1900 年前後にこの主題の先駆的な研究活動がいくつかなされた．その貢献は現在まで続いていると同時に，主題がまだ多くの可能性を持っていることを示唆しており，一見終わりがないように見える．フラクタルへの最近の関心は，空間充填曲線の興味を呼び起こしている．つまり，フラクタルの研究が，数学の小さいけれど重要な部分に新たな光を投じているのである．

本書は，教科書，主題の辞典的扱い，歴史的説明のいずれかにとどまらず，それぞれの性格を少しずつ兼ね備えている．

この本は，セミナーや特別講義，あるいは位相幾何や数学的解析のコースの補足として役立つ．本来は，古典的解析学のファン (aficionado) が，この分野を独習する際に用いる本として著された．

参考となる多くの文献を巻末に載せているので，この分野での研究を望んでいる方々には，これを大いに役立ててもらいたい．この一覧が完全である

と断言することはできないが，他の本よりも広範囲に文献を集め，それを収めた．

直接引用を挿入したり，この主題の発展に最も顕著にかかわった数学者の略歴，写真を載せたりと，歴史的展望に力点をおいた．1つの本の中で，数ヵ国語を混合して用いるという形式の利点を生かし，正確な意味を伝えるために元々の言語で引用文を記した．なお，言語はそれぞれ異なった特色を持つため，英訳で正確な意味や精神を伝えることは不可能である．主題に対して大きな貢献をした時期の数学者の写真を見つける努力をしたが，残念ながら限られたものだけになってしまった．掲載した略歴データや関連した文献の発表年からわかるように，彼らは若くして大きな貢献をしている．事実，平均年齢は30歳を越えたぐらいであった．この年齢は，数学に対する円熟と必要な解析的道具の全望が見えるには十分であり，大胆で型にはまらないアイデアを楽しむことができるような若さと言える．

主題に関連した様々な内容を含むように配慮している．そのいくつかは詳細に取り扱い，またいくつかは概要のみである．詳細に紹介したトピックスの選択は，個人的な好みによった．他にもいくつかもっと紹介したいものもあったが，どこかで線を引かなければ，だれも買いたくないような400ページあまりの本に膨らんでしまうのである．

第1章から第5章，6.1節から6.8節，第7章を理解するために，微積分学の基礎が修得されている必要がある．6.9節，第8章，第9章では，読者は測度論の基本的記法に慣れていなければならない．また，6.10節では，(複素) 関数解析論の知識が必要とされる．空間充填曲線の原型を知ることができる第2章から第5章と，7.5節を除く第7章は，第6，8，9章とは独立に学習することができる．

第6章では，200ページにも及ぶ定義と補助定理なしで，ハーン–マズルキーウィッチの定理を直接導けるようにした．つまり，点集合位相幾何の背景を知らなくてもわかるようにしている．なお，6.1節から6.7節にすべて必要なものを網羅した．エレガントな方法ではないが，**相対的開（閉）**(relatively open(closed)) の概念を避けた．これは，位相数学が専門ではない人には，この記法がなじまないことが多年にわたる経験からわかってきたからである．

フラクタルに関する最後の章は，ペアノ，ヒルベルト，シェルピンスキー

の空間充填曲線の生成に対して，統一した枠組を与える．それに加えて，美しいイラストの表示プログラムを紹介している．しかしながら，仮部屋の粗野な書き物机から見ていると，ワイオミングのグランド・テートンの地平線など，それらすべてが美しいフラクタルを描いているように見える．

ジャクソン，ワイオミング　H.S.
1993年8月

謝辞

本書の原稿を準備する際に，多くの知人から協力，助言，価値あるヒント，参考資料を頂いた．アルファベット順と国別に一覧にすると，彼らは，A. ディック，W. フランク，P. グルーバ，E. ラフカ，W. ヴンダーリヒ（オーストリア）; G. ベッシュ，K. ヤコブ，B. ムンド（ドイツ）; L. M. ジャカルディ（イタリア）; P. アントシック，J. クラシンキービックス，K. ロスコット，Z. パウリコウスカ・ブロツェク，A. シンツェルや1992年秋，ある記念すべき週におもてなし頂いたポーランド科学アカデミーの方々（ポーランド）; F. プラット・ビラー（スペイン），G. L. アレキサンダーソン，R. B. バーケル，R. E. チャンドラー，G. D. フォルクナー，P. D. ラックス，N. J. ローズ（アメリカ）である．最後にあげた方は，技術的に重要な援助と助言を頂いた．事実，彼の献身的な協力なくして，本書は，図を含めて，日の光を決して見なかったであろう．彼の指導のもとにD. L. ハウスは $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}T_EX$ で本書の最初の6章分をタイプした．また，彼女とD. R. ウィルソンは，Apple Macintosh[R] の Adobe Illustrator [TM] を使って，手書きのスケッチをトレースし強調することにより図を用意してくれた[1]．シュプリンガー・フェアラークの $\TeX$ 専門家は，2000年までに出版するために，最後の3章分と付録をタイプした．シュプリンガー・フェアラーク・ニューヨークで物理と数学の主任編集者であるT. v. フェルスターとその同僚とスタッフは，いつも私を励ましてくれ，この仕事の始めから終わりまで援助してもらった．深く感謝の意を表し，彼ら全員に心から御礼を述べたい！　誤りがまったくないよう万全を期した．それらがまったくないことを望むが，経験からいっていくつかはまぬがれないだろう．

1 ［原註］Adobe Illustrator は Adobe Systems 社の登録商標である．Macintosh は，Apple Computer 社の登録商標である．

訳者まえがき

本書は，Hans Sagan 著，*Space-Filling Curves*(Springer-Verlag, 1994) の邦訳である．本書では，“Space-Filling Curve” を「空間充填曲線」と訳した．表紙の図のように，正方形が曲線によって埋め尽される様子がそのまま伝わると思ったからである．また，日本では，この言葉にあまりなじみがないため，第 9 章で扱われているフラクタルをキーワードとして表題に加えた．

ここでいう「曲線」とは，解析や幾何の教科書によくでてくるような滑らかな曲線のみを対象としておらず，それを包含したさらに広い定義をしている．たとえば，2 次元平面上の単位正方形内で曲線を描くことをイメージしてもらいたい．始点と終点を任意に固定し,「一筆書き」の要領で重複点を許して描けるものすべてが曲線となる．この定義に従えば，一般に抱いている曲線に対するイメージが大きく崩れることは明らかである．単位正方形などの一領域内で描ける様々な曲線の中で，その領域全体を埋めつくす，重複点を許した「一筆書き」による曲線，たとえば，表紙の図に示す生成過程を無限回繰り返してできるような，単位正方形全体を埋めつくす曲線が，空間充填曲線である．

1890 年，イタリアの数学者ペアノは，この「空間充填曲線」の大発見によって，多くの数学者を驚かせた．さらにその翌年には，ドイツの数学者ヒルベルトが，幾何的な一構成法を用いて，空間充填曲線を実際に 2 次元平面上に描いてみせたのである．(表紙の図はその構成図を示したものであり，詳しくは本書の 12–13 ページ，および図 2.1.1，図 2.1.2 を参照.）19 世紀後半から 20 世紀にかけて，上記の 2 人の他に，シェルピンスキー，クノップ，ポーヤ，

ルベーグ，シェーンベルクなど，錚々たる数学者が様々な空間充填曲線を描いたのである．たとえば，シェルピンスキーとクノップは，ペアノやヒルベルトとは異なる空間充填曲線を描いてみせた（63 ページを参照）．また，ポーヤは，シェルピンスキーの生成方法を一般化した（77 ページを参照）．上記の 4 人による曲線は,「いたるところ微分不可能な」空間充填曲線であったが,ルベーグは,「ほとんどいたるところ微分可能な」空間充填曲線を作ってみせたのである（94 ページを参照）．その後，ハーンとマズルキーウィッチは，線分の連続像に関して一般的特徴づけを行い（133 ページを参照），シェーンベルクは，ルベーグの空間充填曲線の新しい変形を示した（149 ページを参照）．また，オズグッドは，正のルベーグ測度を持ったジョルダン曲線を示した（167 ページを参照）．本書の最後では，ドラゴン曲線と呼ばれる最も新しい空間充填曲線の例を紹介している（206 ページを参照）．

原著は，空間充填曲線の解説書としては，世界でも最初の出版物である．どういう訳か空間充填曲線について，これまでまとまった解説書がなかった．実際，空間充填曲線は，フラクタルの一部で紹介されることが多かった．研究発表などの場で,「これが曲線ですか」という質問をよく耳にする．高木貞治著『解析概論　第 3 版』（岩波書店）において「このような曲線は迷惑である．上記の定義は曲線の定義として，あまりに広汎に過ぎるのである.」(32 ページ）と書かれてある通り，ほとんどの空間充填曲線が解析的にはいたるところ微分不可能な曲線である．しかし，ヒルベルトの功績によってわかりやすく幾何的な図で説明できるという特徴もある．講演会やセミナーなどで空間充填曲線の話をすると，外国，特にヨーロッパでは数学者以外であってもよく知った方が多い．日本では，空間充填曲線は，ペアノ曲線と呼ばれることが多く，教科書の一部に，いずれかのペアノ曲線の図が簡単に紹介されている．

10 年以上前，恩師である河口英二教授（九州工業大学）から，空間充填曲線の 1 つであるヒルベルト曲線の存在を教えて頂いた．これは，ある教科書に載っていた曲線の図で，計算機プログラミングにおける再帰手続きの例題によく登場していたものである．エレガントな再帰手続きで様々な空間充填曲線が描けるので，参考文献の N. Wirth や D. E. Knuth の著書をはじめ，

プログラミングの教科書にはよく用いられる．訳者は，数学的な興味と同時に，この曲線を描くための最速計算方法を考案したり，N 次元 $(N > 2)$ の空間に対応できる計算方法に拡張したりと，この曲線に関する様々な研究に取り組んだ．

空間充填曲線の応用研究で最も有名なものは，本書においても参考文献に挙がっているシェルピンスキー曲線の巡回セールスマン問題への応用である．都市数が多くなった場合の高速近似解法に利用されている．その他，確率過程，画像処理・圧縮，電子透かしなどへの応用研究が活発になされ，1980 年以降発表論文数も急速に多くなっている．今後，空間充填曲線の高速計算方法や応用研究に関しても，本にまとめたいと思っている．

昨年，Martin Gardner が *Scientific American* からの抜粋を本にまとめた 15 巻目となる最後の本をシュプリンガー・フェアラーク・ニューヨークから出版した．84 歳である．彼は，8 巻目の *Mathematical Magic Show*(Vintage Books，1978) で，空間充填曲線のいくつかと関連トピックスをわかりやすく紹介しているので，さらに勉強したい方は一読をお奨めする．また，ペアノが 1890 年に発表したフランス語の原著論文を，プログラムとともに詳しく解説したものが，安居院猛監修『アルゴリズム選集 1　グラフィックス編』（新紀元社，1992）に出ているので，参考にされたい．空間充填曲線の次元に関しては，石村貞夫，石村園子著『フラクタル数学』（東京図書，1990）にも解説があるので一読をお奨めする．

最後に，日頃ご指導頂く本学迫江博昭教授，確率過程への応用について教えて下さった杉山宏教授（湘南工科大学），巡回セールスマン問題への応用について教えて下さった今井浩助教授（東京大学）に，この場を借りて感謝したい．また，担当して頂いたシュプリンガー・フェアラーク東京のスタッフの方々にも感謝したい．この本では，ドイツ語，フランス語，ポーランド語などでの原文がいくつか紹介されていることもあり，翻訳に際し，ドイツ，フランス，イタリア，ポーランド，英国，アメリカ合衆国，中国出身の研究者から，原文の意味や発音などをいろいろと教えて頂いたことを最後に記しておく．

1998 年 10 月　　　　鎌田　清一郎

目　次

第 1 章　はじめに

§1.1　空間充填曲線の歴史

G. カントール (1878) は，任意の 2 つの有限次元の滑らかな多様体が，その次元に関係なく同じカージナル数を持っていることを示した．そして，それ以来，数学は，それ以前の数学とは異なるものになった．特に，カントールは，区間 $[0,1]$ が正方形 $[0,1]^2$ に全単射的に写像されるとした．しかし，このような写像が連続になり得るかという疑問がただちに起こった．E. ネット (1879) は，そのような全単射写像が必ず不連続であることを示すことによって，そのような憶測に終止符を打ったのである．全単射性の条件がなければ，今度は $[0,1]$ から $[0,1]^2$ への連続な全射写像を得ることができるのか？ $[0,1]$（あるいは，任意の区間）から平面（あるいは，空間）への連続写像が，現在に至るまで常に曲線と呼ばれるので，次の疑問が再び生じる．正のジョルダン容量（面積）を持った 2 次元の領域（たとえば，$[0,1]^2$ のようなもの）のすべての点を通るような曲線が存在するか？ ペアノ (1890) は，最初にこのような曲線を見つけ，この問題を解決した．現在，この性質を持った曲線は，空間充填曲線 (space-filling curve)，あるいはペアノ曲線 (Peano curve) と呼ばれている．さらに，D. ヒルベルト (1891)，E. H. ムーア (1900)，H. ルベーグ (1904)，W. シェルピンスキー (1912)，G. ポーヤ (1913) らによる例が続いた．1900 年前後に，多くのこのような曲線が発見されたとき，**空間**という言葉は，主として 3 次元空間に対して使われている．これらの曲線は，論文題目 ('Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück' =「直線の，曲面の

一領域への写像」, ‘Une courbe qui remplit une aire plane’ =「平面領域を充填する曲線」, あるいは, より特定して, ‘O krzywych, wypolniajacych kwadrat’ =「正方形を充填する曲線について」) から明らかなように, 曲面充填曲線 (surface-filling curve) と呼ばれた.

だが, これで議論が終わったわけではなかった. $[0,1]$ から $[0,1]^2$ (あるいは正のジョルダン容量を持った他の2次元領域) への連続な全単射写像が, 不可能であることが明らかになったことから, 問題は, 正の外測を持って一領域上へ写像されるかどうかということに移っていった. 言い換えれば, 正の外測を持った, n 次元ジョルダン曲線 ($[0,1]$ から $\mathbb{E}^n$ (ただし, $n \geq 2$) への連続単射写像) が存在するかということである. 1変数族のそのような曲線を構成したのは, W. F. オズグッド (1903) であった. 事実, オズグッドの曲線は, 正のルベーグ測度を持っており, 彼の族の極限弧がペアノの空間充填曲線である. そのような族の他の例として, 極限弧としてシェルピンスキーの空間充填曲線を持った K. クノップ (1917) によるものなどがあげられる.

$[0,1]$ (あるいは任意の線分) の連続像として示した正方形 (とすべての連続像) に関して, 1線分の連続像の一般的構造とは何かという疑問が生じた. A. シェーンフリース (1908) は, 2次元平面の部分集合に適用し, 数学の本流に決して入らなかった1つの基準を見つけた. この問題のさらなる発展は, 局所連結の新たな位相の概念へと受け継がれ, そして, S. マズルキーウィッチ (1913) と H. ハーン (1913) によって独立に見つけられた完全解法へと移っていった. 1つの集合がコンパクト, 連結, 局所連結ならば, かつそのときに限り, 1線分の連続像があり, その基準は, n 次元ユークリッド空間ばかりでなく, より一般的なハウスドルフ空間においても適用できることがわかった.

すべての問題が解決され, これ以上の驚きがもう起こらないだろうと思われたとき, H. シュタインハウス (1936) は, $[0,1]$ 上の2つの連続非定数関数がルベーグ測度に関して確率的に独立であるならば, それらが空間充填曲線の座標関数になることを発見した. 彼は, 加算無限次元の空間内で空間充填曲線を構成することに, この結果を利用したのである. I. J. シェーンベルク (1938) は, ルベーグの空間充填曲線の新しい変形を示し, また R. サレムと A. ジグムント (1945) は, 開単位円板内で解析関数であり, 円板の円周を正方形上に写像する閉単位円板上で連続となる, 空隙ベキ級数を構成した. こ

れは，その実部と虚部が空間充填曲線の座標関数である．

§1.2　記法

実数の完全順序体を $\mathbb{R}$，n 次元カーテシアン空間を $\mathbb{R}^n$，そして複素数体を $\mathbb{C}$ により表す．

$\mathbb{R}^n$ の部分集合はスクリプトの大文字を使って表記する．たとえば，**閉単位区間**に対して，

$$\mathcal{I} = [0,1],$$

閉単位正方形に対して，

$$\mathcal{Q} = [0,1]^2,$$

閉単位立方体に対して，

$$\mathcal{W} = [0,1]^3,$$

また，(0,0)，(2,0)，(1,1) を頂点とする**閉三角領域**を $\mathcal{T}$ とする．

どの全体集合に対しての補集合かが前後関係から明らかな場合，集合 $\mathcal{S}$ の補集合は，$\mathcal{S}^c$ によって表す．それ以外では，$\mathcal{U}$ に対する $\mathcal{S}$ の補集合を表記するのに $\mathcal{U}\backslash\mathcal{S}$ を使う．

ベクトルは小文字活字によって，また，その要素は小文字ギリシャ活字によって表す．たとえば，

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

ベクトル x のユークリッド・ノルムは，

$$\|x\| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 (+\zeta^2)}$$

によって，また，n 次元ユークリッド空間（測度を定義するユークリッド・ノルムを持った $\mathbb{R}^n$）は，$\mathbb{E}^n$ によって表す．

行列は，単位行列を表す I を含め，大文字 H，K，P，S によって表す．また，相似変換は，ゴシック文字 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{H}$，$\mathfrak{K}$，$\mathfrak{L}$，$\mathfrak{P}$，$\mathfrak{S}$ によって表す．

Γ は，**カントール集合**であり，J_n は，たとえば，$J_2(Q)=1$ のような $\mathbb{E}^n$ の**ジョルダン可測**部分集合の n 次元**ジョルダン容量**（面積，体積）であり，Λ_n は，たとえば，$\Lambda_1(\Gamma)=0$ のような $\mathbb{E}^n$ の**ルベーグ可測**部分集合の n 次元**ルベーグ測度**を表す．

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ 内への**単射**写像は

$$\mathcal{A} \overset{1-1}{\longrightarrow} \mathcal{B},$$

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ 上への**全射**写像は

$$\mathcal{A} \overset{\text{onto}}{\longrightarrow} \mathcal{B},$$

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ 上への**全単射**写像は

$$\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B}$$

と記す．

2 進数（表現）は

$$0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots = b_1/2 + b_2/2^2 + b_3/2^3 + \cdots,\ b_j = 0 \text{ または } 1,$$

3 進数（表現）は

$$0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots = t_1/3 + t_2/3^2 + t_3/3^3 + \cdots,\ t_j = 0, 1, \text{ または } 2,$$

4 進数（表現）は

$$0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots = q_1/4 + q_2/4^2 + q_3/4^3 + \cdots,\ q_j = 0, 1, 2, \text{ または } 3,$$

8 進数（表現）は

$$0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3\ldots = \omega_1/8 + \omega_2/8^2 + \omega_3/8^3 + \ldots,\ \omega_j = 0, 1, 2, \ldots, \text{ または } 7$$

と記す．また，整数の **2 進表現**は

$$(b_0b_1b_2\ldots b_n)_2 = b_0 2^n + b_1 2^{n-1} + b_2 2^{n-2} + \cdots + b_n$$

とし，整数の **3 進表現**は

$$(t_0t_1t_2\ldots t_n)_3 = t_0 3^n + t_1 3^{n-1} + t_2 3^{n-2} + \cdots + t_n$$

とする．循環小数の周期を表すには，

$$0_{\dot{b}}a_1a_2a_3\ldots a_n\overline{b_1b_2b_3\ldots b_k} = 0_{\dot{b}}a_1a_2a_3\ldots a_nb_1b_2b_3\ldots b_kb_1b_2b_3\ldots b_k\ldots$$

のような上つけ線を使う（付録 A.2.1 も参照）.

$\triangleq$ は「定義により同等 (equal by definition)」を意味する．そして，証明の終わりの小 4 角形 □ は,「仍って証明せられたり[1]」を表す.

この本を通して，閉有界線分から $\mathbb{E}^n$ 内への関数を扱う．任意の閉有界線分は，$\mathcal{I}$ に同相であるので，そのような関数は，一般性を失うことなく，定義域 $\mathcal{I}$ を持つと仮定する．読者は，簡単に

$$\left.\begin{array}{l}\xi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)t \\ \eta = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1)t\end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 1,\ \xi_1 \ne \xi_2 \quad \text{または} \quad \eta_1 \ne \eta_2 \qquad (1.2.1)$$

が $\mathcal{I}$ から，点 (ξ_1, η_1) と点 (ξ_2, η_2) 間の閉線分上への同相写像 h を表すことを理解できるであろう．これは，実際，微分同相写像である．f が微分可能であれば，合成関数 $f \circ h$ も微分同相写像であり，また，f が微分不可能であれば，$f \circ h$ も微分同相写像でない.

§1.3　定義とネットの定理

定義 (1.3.1)　f が $\mathbb{E}^m$ の部分集合から $\mathbb{E}^n$ 内への関数であれば，$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^m$ における

$$f_*(\mathcal{A}) = \{f(x) \in \mathcal{R}(f) | x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}(f)\}$$

は，f による $\mathcal{A}$ の順像と呼ぶ．$\mathcal{D}(f)$ は定義域，$\mathcal{R}(f)$ は値域を表す.

曲線という言葉は，人によってそれぞれ意味するところが異なってしまう．そこで次の定義を導入する.

定義 (1.3.2)　$f : \mathcal{I} \to \mathbb{E}^n$ が連続であれば，像 $f_*(\mathcal{I})$ は，曲線と呼ぶ．$f(0)$ は曲線の始点であり，$f(1)$ はその終点である.

$$x = f(t), \quad t \in \mathcal{I}$$

---

[1] ［訳註］ラテン語原文：quad erat demonstrandum.

を曲線 $\mathcal{C} = f_*(\mathcal{I})$ のパラメータ表現と呼ぶ．要素内では

$$\left.\begin{array}{l}\xi = \varphi(t)\\ \eta = \psi(t)\end{array}\right\} \quad \mathbb{E}^2\text{内} \qquad \text{そして} \qquad \left.\begin{array}{l}\xi = \varphi(t)\\ \eta = \psi(t)\\ \zeta = \chi(t)\end{array}\right\} \quad \mathbb{E}^3\text{内}.$$

この定義は，始点かつ／または終点を持たない曲線を除外しているが，通常，曲線と見なされるほとんどの対象を含んでいる．ここでは，それらの中から「いくつか」を取り上げる．$\mathbb{E}^2$ 内の正方形 $\mathcal{Q}$，$\mathbb{E}^3$ 内の立方体 $\mathcal{W}$ のような正のジョルダン容量（$n = 2$ のとき面積，$n = 3$ のとき体積）を持った n 次元領域のすべての点を通過する曲線が存在することは，次章からの 4 つの章をみればわかるようになっている．そのような曲線は，空間充填と呼ぶ．

定義 (1.3.3)　$f : \mathcal{I} \to \mathbb{E}^n$, $n \geq 2$ が連続，かつ，$J_n(f_*(\mathcal{I})) > 0$ であれば，$f_*(\mathcal{I})$ は，空間充填曲線と呼ばれる．

カントールは，1878 年，任意の 2 つの有限次元の滑らかな多様体 μ_m, μ_n が，次元に関係なく，同じ**カージナル数**を持つ，すなわち 1 対 1 対応を持つことを示した (Cantor[1])．これは，全単射 $f : \mu_m \leftrightarrow \mu_n$ が存在することを意味している．特に，$g : \mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{Q}$，$h : \mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{W}$，$k : \mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{T}$ が存在するとした．

ゲオルク・カントール (1845–1918) は，サンクト・ペテルブルクに生まれ，ドイツのハレに歿した．彼は，1862 年チューリッヒ大学で研究を開始し，1863 年から 1869 年にかけてベルリン大学にて研究を続けた．そこで，彼はワイエルシュトラスに大きな影響を受けた．E. E. クンマーの指導のもとで論文を書き，1867 年に博士号を取得した．1869 年から 1905 年までハレ大学において教鞭をとった．そこで 1879 年に教授となった．彼は，集合論と無限論を発展させることにより，数学と数学的考え方に革命的変化をもたらした．ベルリン大学での教授の地位を得ようとする彼の野望は，超限数の概念を受け入れなかった，L. クロネッカーによって打ち砕かれた．（より詳しくは，Meschkowski[1] を参照.）



G. カントール

f が空間充填曲線を生成するならば，E. ネット (1879) が示したように，それは全単射であり得ない (Netto[1]).

定理 (1.3)（ネット）　f が n 次元の滑らかな多様体 μ_m から n 次元の滑らかな多様体 μ_n への全単射であり，かつ $m \neq n$ ならば，f は，必然的に不連続となる.

この定理の $\mu_m = \mathcal{I}$ と，$\mu_n = \mathcal{Q}$ か $\mathcal{W}$ か $\mathcal{T}$ の場合については，6.4 節で証明する．一般的な場合について，読者は文献 (Greenberg[1]) を参照するとよい.

ユージン・ネット (1848–1919) は，カントールと同世代の人であり，ドイツのハレに生まれ，ギーセンに歿した．カントールと同じ 1866 年から 1870 年までベルリン大学において研究した．そこで，クロネッカーとワイエルシュトラスに大いに影響を受けた．1870 年，彼はワイエルシュトラスの指導のもとに博士号を取得し



E. ネット

た. 1879年から1882年までシュトラスブルク大学にて, 1882年から1888年までベルリン大学にて教鞭をとり, そして, 最後にギーセン大学に落ち着いた. そこで1913年の定年まで教鞭をとった. 数学への彼の主な貢献は, 群論と組合せ論の分野にあった. (より詳しくは, Biermann[1] を参照.)

$\mathcal{I}$ から $\mathbb{E}^n$ 内への単射写像は, **ジョルダン曲線** (Jordan curve) と呼ばれる. 第8章では, このような曲線についても述べる.

ネットの定理は, **空間充填ジョルダン曲線は存在しない**ことを暗に意味する. (可能な限り混乱を避けるため, W. シェルピンスキーや St. マズルキーウィッチのような何人かの著者が, 線分から $\mathbb{E}^n$ への連続写像に対してジョルダン曲線という言葉を使っていることを指摘しておこう. **それらの**ジョルダン曲線のいくつかは, 空間充填である.)

§1.4　問題

1.　次のことを示しなさい :

$$0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots b_nb = 0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots b_n(b-1)\overline{1}, \qquad b=1,$$

$$0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_nt = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_n(t-1)\overline{2}, \qquad t=1 \text{ または } 2,$$

$$0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_nq = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n(q-1)\overline{3}, \qquad q=1,\ 2 \text{ または } 3.$$

2. 次のことを示しなさい：

$$0_{\dot{2}}b_1b_2b_3b_4\ldots = 0_{\dot{4}}(2b_1+b_2)(2b_3+b_4)\ldots,$$

$$0_{\dot{3}}t_1t_2t_3t_4\ldots = 0_{\dot{9}}(3t_1+t_2)(3t_3+t_4)\ldots.$$

3. $0_{\dot{2}}011001$ を 10 進数と 4 進数で表現しなさい．また，$0_{\dot{4}}301213$ を 2 進数と 10 進数で表現しなさい．また，$0_{\dot{3}}2201202$ を 10 進数と 9 進数で表現しなさい．($0_{\dot{9}}e_1e_2e_3\ldots = e_1/9+e_2/9^2+e_3/9^3+\cdots$, $e_j=0,1,2,\ldots$, または 8, は **9 進数**と呼ばれている.)
4. 3/8 を 2 進数，3 進数，4 進数，8 進数で表現しなさい．
5. $0_{\dot{2}}011$, $0_{\dot{3}}\overline{101}$, $0_{\dot{4}}3\overline{012}$, $0_{\dot{8}}6103$ を分数で表現しなさい．
6. いかなる有理数も，有限あるいは循環した 2 進数，3 進数，4 進数，8 進数の表現を持ち，その逆も成り立つことを示しなさい．
7. $\mathcal{I}$ と $\mathcal{Q}$ が同じカージナル数を持ち，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{W}$ も同じカージナル数を持つことを示しなさい．(ヒント：$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ と $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ならば，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{D}$.)
8. $f:\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{Q}$, $g:\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{W}$ であるような関数 f と g を見つけなさい．
9. カントール集合

$$\Gamma = \{0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots | t_j = 0 \text{ または } 2,\ j=1,2,3,\ldots\}$$

から $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{W}$ への連続写像を見つけなさい．
10. 式 (1.2.1) における写像が $\mathcal{I}$ から (ξ_1, η_1) と (ξ_2, η_2) 間の閉線分への微分同相写像であることを示しなさい．
11. $t = t_{0\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots \in [0,1]$ としよう．$j=0,1,2,3,\ldots$ に対して，$t_j = [3^jt]-3[3^{j-1}t]$ であることを示しなさい．ただし，$[t]$ = 最大整数 $\le t$ である．

第 2 章　ヒルベルトの空間充填曲線

§2.1　ヒルベルトの空間充填曲線の生成



デヴィット・ヒルベルト (1862–1943) は，他の誰よりも 20 世紀の数学に指針を与えてきた人物である．彼は，ケーニヒスベルク（1945 年ロシアに併合されたとき，カリニングラードと改名された）に生まれ，ゲッティンゲンに歿した．ハイデルベルク大学で過ごした 2 学期を除いて，ケーニヒスベルク大学で研究をし，1884 年に博士号を取得した．(1882 年に π が超越数であることの証明に成功した) C. L. F. リンデマンと，特に A. フルヴィッツは，当時彼がもっとも影響を受けた指導者であった．博士号取得後，ライプチヒとパリで研究を行ない，1886 年にケーニヒスベルク大学に戻った．1892 年，(チューリヒに移った) フルヴィッツの後継者となり，1893 年，リンデマンが当時まで持っていた教授職を引き継いだ．1895 年，ゲッティンゲン大学の招聘に従い，そこで 1930 年の退職まで教鞭をとった．ヒルベルトは数学の全分野に多大な貢献をした．1893 年まで算法，1894 年から 1899 年まで代数的整数論，1899 年から 1903 年まで幾何学に関する基礎論，1904 年から 1909 年まで解析学，ここでディリクレ問題に対する一解法の存在を証明し，変分法の場の理論へ積分不変式を導入し，積分方程式の扱いに関して線形系の概念を変えた．現在，ヒルベルト空間と呼ばれる完備かつ可分な内積空間 (dot-product space) の導入は，ℓ_2 と $\mathcal{L}_2(0,1)$ の同形等長に関するリース–フィッシャー定理のお膳立てをし，フーリエ級数の収束の問題に最終的な解を与えた．1918

年からは数学基礎論の研究に時間とエネルギーを捧げた．ところが，クルト・ゲーデルによって彼は不利な立場に置かれることになった．ゲーデルは，完全かつ無矛盾系を構築しようとするヒルベルトの目的が，到達不可能なことを実際に示したのである.（さらに詳しくは，Freudenthal[1] を参照.）

空間充填曲線を最初に発見したのは，G. ペアノであったが，— E. H. ムーアの言葉 (Moore[1], p.73) を借りると — 曲面充填曲線の現象を幾何的なイメージとして明らかにしたのは，ヒルベルトであった．彼は，初めて空間充填曲線のすべての類を作り出す一般的な幾何的生成手続きを示した．論文の第 2 の文章を読むと，'Die für eine solche Abbildung erforderlichen Functionen lassen sich in übersichtlicher Weise herstellen, wenn man sich der folgenden geometrischen Anschauung bedient'（そのような写像に必要な関数群は，次の幾何的洞察を用いれば，わかりやすい方法で表現できる）とある．それゆえ，彼は次の発見的原理を広めようとした．区間 $\mathcal{I}$ が正方形 $\mathcal{Q}$ 上に連続写像されるならば，$\mathcal{I}$ を 4 つの合同な部分区間に分割し，$\mathcal{Q}$ を 4 つの合同な部分正方形に分割した後，各部分区間は，部分正方形の 1 つに連続的に写像される．次に，各部分区間をさらに 4 つの連続する部分区間に分割し，各部分正方形を 4 つの連続する部分正方形に分割して，同様の分割を繰り返す．これが無限に実行されると，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{Q}$ は，$n = 1, 2, 3 \ldots$ に対して 2^{2n} 個の合同レプリカ（複製）に分割される．ヒルベルトは，隣接する部分区間が共通辺を持った隣接する部分正方形に対応し，包含関係が保存されるように，部分正方形を配置できることを示した．すなわち，1 つの正方形が 1 つの区間に対応するならば，その部分正方形がその区間の部分区間に対応することを示したのである．図 2.1.1 に示されるように，最初の 3 ステップを見ると，この過程がいかに実現されているかがわかる．太い多角線は，部分正方形をたどる順番を表している.（ところで，図 2.1.1 は，ヒルベルトの 1891 年の論文において描かれた原図のファックスである．空間充填曲線の生成の図が初めて印刷物に載ったという著者の心情的な理由で，Springer-Verlag Heidelberg の許可を得て，ここに転載した.）第 6 ステップは，図 2.1.2 に示されている.（R. Oldenbourg Verlag GmbH.(München) の許可を得て，Strubecker[1](p.698) から図を転載した.）

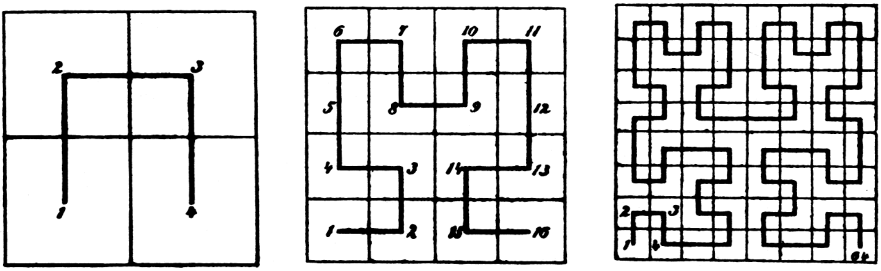


図 2.1.1 ヒルベルトの空間充填曲線の生成

$\mathcal{I}$ から $\mathcal{Q}$ への写像を次のように定義しよう.

定義 (2.1) あらゆる $t \in \mathcal{I}$ は, 長さを 0 に縮めた（分割を繰り返すことによって生成された）縮小閉区間列 (a sequence of nested closed intervals) によって一意に決定される. 対角線を 1 点に縮め, $\mathcal{Q}$ 内で一意に点を定義する縮小閉正方形列, すなわち, t の像 $f_h(t)$ は, この縮小閉区間列に一意に対応している. $f_{h*}(\mathcal{I})$ は**ヒルベルト曲線** (Hilbert curve) と呼ばれる.

t が部分区間の 1 つの終点 —— 0 あるいは 1 以外 —— であるならば, それは, 縮小区間の 2 種類の異なった列に属する. しかし, 隣接した 2 区間が隣接した 2 正方形上に写像されるので, これは同じ像になる.

写像 $f_h : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ は全射である, すなわち, ヒルベルト曲線は, 正方形 $\mathcal{Q}$ 内のあらゆる点を通過する. 任意の点 $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{Q}$ をとろう. この点は, 対角線を 1 点に縮める縮小閉正方形列内にある. この列において, 長さが 0 に縮まり, 一意の $t_0 \in \mathcal{I}$ に定まるような縮小閉部分区間列に対応させると,
$$f_h(t_0) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$
となる. 点が正方形の角にあるならば, それは, 連続区間に対応しない少なくとも 2 つの正方形に属するだろう. それが辺上であれば, 連続区間に対応しない少なくとも 2 つの正方形に属するかもしれない. そのような点は, 縮小閉正方形の 2 つ以上の異なる列に属している. したがって, $\mathcal{I}$ 内に 2 つ以上の異なる前像 (preimage) を持っている. これは, ネットの定

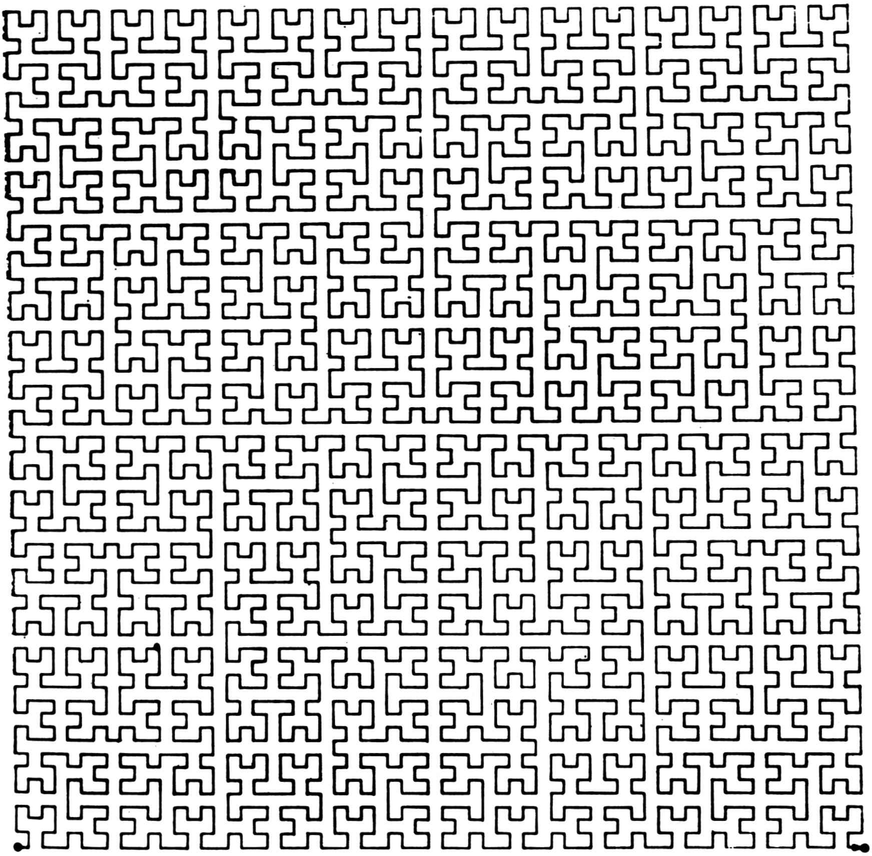


図 2.1.2　ヒルベルト曲線の生成における第 6 ステップ

理から驚くべきことではない. □

写像 $f_h : \mathcal{I} \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{Q}$ **は連続である. すなわち,** $f_{h*}(\mathcal{I})$ **は曲線である.** $\mathcal{I}$ は, n 回目の繰り返しで, 長さ $1/2^{2n}$ の 2^{2n} 個の部分区間に分割される. $|t_1 - t_2| < 1/2^{2n}$ となるように $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ を選ぼう. 区間 $[t_1, t_2]$ は, せいぜい 2 つの連続部分区間で重なり合い, その像は, 対角長 $\sqrt{5}/2^n$ 以下の長方形をなす, 辺長 $1/2^n$ の 2 つの連続する正方形になる. したがって, $\| f_h(t_1) - f_h(t_2) \| \leq \sqrt{5}/2^n$ であり, $f_h : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ は連続である. □

要約すると，

定理 (2.1)　ヒルベルト曲線は，空間充填曲線である．すなわち，$f_{h^*}(\mathcal{I}) = \mathcal{Q}$.

§2.2　ヒルベルト曲線のいたるところ微分不可能性

ヒルベルト (Hilbert[1]) は，その曲線がいたるところ微分不可能であることをついでに (en passant) 示した．(‘Die oben gefundenen abbildenden Functionen sind zugleich einfache Beispiele für überall stetige and nirgends differentiirbare Functionen’=「上の写像は，同時に，いたるところ連続であり，いたるところ微分不可能の簡単な例である.」) この証明は，100 年後の 1991 年，初めて明らかになった．著者が，Sagan[3] に掲載した．

定理 (2.2)　定義 2.1 において定義したヒルベルト曲線の座標関数 $f_{h^*}(\mathcal{I})$ は，いたるところ微分不可能である．

証明　$n \geq 3$ としよう．任意の $t \in \mathcal{I}$ に対して，$|t - t_n| \leq 10/2^{2n}$ となるように $t_n \in \mathcal{I}$ をとろう．そのとき，t の像の座標 $\varphi_h(t), \psi_h(t)$ は，t_n の像の座標 $\varphi_h(t_n), \psi_h(t_n)$ とは少なくとも辺長 $1/2^n$ の正方形だけ離れている．このことは常に可能である（図 2.1.1 を参照）．そのとき，

$$|\varphi_h(t) - \varphi_h(t_n)|/|t - t_n| \geq 2^n/10$$

となる．同様の議論が第 2 要素の ψ_h に対しても成り立つ．　□

§2.3　ヒルベルト曲線の複素表現

純粋に幾何的生成過程による定義に基づいて，ヒルベルト曲線のすべての必要とされる性質と，そのいたるところ微分不可能性を見ることができた．正方形を数えること以外に，任意の $t \in \mathcal{I}$ からその像の点座標をいかに計算するかについて，まだ説明していない．しかし，この計算は，t が $\mathcal{I}$ の分割による 2^{2n} 個の部分区間の 1 つの終点（あるいは始点）にあり，n が

小さいときにだけ実行される．明らかに，ヒルベルト曲線の代数的・解析的表現は，その試みが大変退屈なものだったので，過去100年間試みられなかった (Olmsted[1])．1949年，エミール・ボレルは，ヒルベルト曲線の算術的記述を与えることに，ほぼ成功した (Borel[1])．それは，実際に長いものであった．1991年，著者は，計算機によって任意の希望する精度で数値評価しやすいような簡単な表現を試みた (Sagan[5])．$t = k/2^{2n}$（ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$，$k = 0, 1, 2, 3, \ldots 2^{2n}$）であれば，計算機の精度が高い限り，正確な座標を求めるであろう．（6.10節において議論する解析関数による空間充填曲線の表現と混同しないために）計算式の導出に先立って，ヒルベルト曲線の複素表現を導入しよう．これは，今度は，W. ヴンダーリヒ (Wunderlich[1], [3]) のアイデアに基づいている．彼は ―― カール・シュトルベッカーによると ―― ヒルベルトの作り方が特に簡単でわかりやすい方法であることを示した．(‘Die Hilbert’sche Konstruktion einer Peano Kurve kann nach Walter Wunderlich (1954) besonders einfach and anschaulich auf die folgende Weise erhalten werden[1]’ ―― Strubecker[1], p.697)．図2.1.1をみると，ヒルベルト曲線は，左下の部分正方形から始まり，右下の部分正方形で終わることがわかる．部分正方形は点にまで縮小するので，ヒルベルト曲線は原点（$\mathcal{Q}$ へ入る点）から始まり，点(1,0)（$\mathcal{Q}$ から出る点）で終わることになる．部分正方形は，各部分正方形から出る点が次の部分正方形に入る点とつながるように，方向づけられなければならない．図**2.3**において，繰り返し過程の最初の2ステップに対して，部分正方形内の正しい方向を太い矢印によって示した．図2.3(b)の配置を得るため，図2.3(a)の $\mathcal{Q}$ に次の変換を適用する．複素表現を利用して，$z \in \mathbb{C}$ に対して，まず原点方向に一様に2:1比で $\mathcal{Q}$ を縮小させる：$z' = \frac{1}{2}z$．次に，その結果得られた正方形を90° 回転させ：$z'' = z'i$，最後に虚軸に対して反転させる：$z''' = -\overline{z''}$．これら3つの変換を合成し，合成変換を $\mathfrak{H}_0$ とすると，

$$\mathfrak{H}_0 z = \frac{1}{2}\overline{z}i \tag{2.3.1}$$

---

1 ［訳註］原著では，今までだと，引用した文章が英語以外の場合，後ろに英訳を載せていたが，この一文にはそれがない．それで訳者がドイツ語から日本語へ訳すこととする．「ペアノ曲線のヒルベルトによる作り方は，W. ヴンダーリヒ (1954) による次の方法で，特に簡単でわかりやすいものとなっている.」

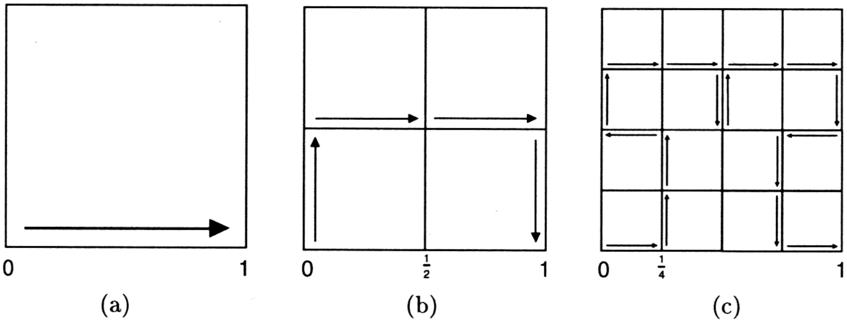


図 2.3 正方形の写像

を得る．これは，図 2.3(b) の左下角の正方形を作る．図 2.3(b) の左上角の正方形を得るため，前と同様に $\mathcal{Q}$ を縮小し，それから上に $\frac{1}{2}$ だけ移動させる．これは，変換

$$\mathfrak{H}_1 z = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2} \tag{2.3.2}$$

となる．右上角の次の正方形は，$\mathcal{Q}$ を縮小させ，上に $\frac{1}{2}$ だけ，右に $\frac{1}{2}$ だけ移動させることにより得られる．

$$\mathfrak{H}_2 z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}. \tag{2.3.3}$$

最後に，図 2.3(b) の左下角の正方形は，$\mathcal{Q}$ を縮小させ，$-90°$ 回転させ ($z' = -\frac{1}{2}zi$)，虚軸で反転させ ($z'' = -\overline{z}'$)，そして右に 1 だけ，上に $\frac{1}{2}$ だけ移動させることにより得られる．その結果は，

$$\mathfrak{H}_3 z = -\frac{1}{2}\overline{z}i + 1 + \frac{i}{2} \tag{2.3.4}$$

である．これらの 4 つの変換を図 2.3(a) に適用すると，図 2.3(b) になる．また，これらの変換の図 2.3(b) への適用は，図 2.3(c) を得る．($\mathcal{Q}$ は，変換 $\mathfrak{H}_* : K(\mathbb{C}) \to K(\mathbb{C})$ に関して唯一の「不動点 (fixed point)」である．ここで $K(\mathbb{C})$ は，$\mathfrak{H}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=0}^{3} \mathfrak{H}_{i*}(\mathcal{A})$ (ただし,$\mathcal{A} \in K(\mathbb{C})$) によって定義される $\mathbb{C}$ の空でないすべてのコンパクト部分集合の空間である．より詳しいことは，9.3 節を参照.)

ヒルベルト曲線の生成過程の性質は，$t \in \mathcal{I}$ を4進数の形（4進表現）

$$t = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots, \quad q_j = 0, 1, 2, \text{または} 3$$

で表現すると，わかりやすくなるであろう．t は $\mathcal{I}$ の4つの部分区間への最初の分割において (q_1+1) 番目の部分区間内にある．したがって，その像は $\mathcal{Q}$ の4つの部分正方形への最初の分割において，(q_1+1) 番目の正方形内にある．すなわち，$f(t) \in \mathfrak{H}_{q_1}\mathcal{Q}$ である．それは，最初の分割における (q_1+1) 番目の部分正方形 $\mathfrak{H}_{q_1}\mathcal{Q}$ 内で，2回目の分割の (q_2+1) 番目の部分正方形内にある．すなわち，$f(t) \in \mathfrak{H}_{q_1}\mathfrak{H}_{q_2}\mathcal{Q}$ である．この導出を無限回繰り返すと，

$$f_h(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \lim_{n\to\infty} \mathfrak{H}_{q_1}\mathfrak{H}_{q_2}\mathfrak{H}_{q_3}\ldots\mathfrak{H}_{q_n}\mathcal{Q} \tag{2.3.5}$$

に到達する．ここで，包含記号 $\in$ は，部分正方形が点に縮小するので，等号に置き換えられる．有限の4進数の像を見つけるため（$\mathcal{I}$ の分割における部分区間の終点あるいは始点），まず，

$$0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n000\ldots$$

に注意する．(2.3.5) 式により，

$$f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1}\mathfrak{H}_{q_2}\mathfrak{H}_{q_3}\ldots\mathfrak{H}_{q_n}\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\ldots\mathcal{Q}$$

である．ここで，

$$\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\ldots z = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{H}_0^n z = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\begin{cases} i\bar{z}, & n\ \text{が奇数のとき} \\ z, & n\ \text{が偶数のとき} \end{cases}$$

であるから，

$$\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\ldots z = 0$$

となり，したがって，

$$f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1}\mathfrak{H}_{q_2}\mathfrak{H}_{q_3}\ldots\mathfrak{H}_{q_n}0 \tag{2.3.6}$$

を得る．

$$\mathfrak{H}_{q_j} z \triangleq \frac{1}{2} H_{q_j} z + \frac{1}{2} h_{q_j}, \quad q_j = 0, 1, 2, 3 \tag{2.3.7}$$

としよう．ここで，$H_0 z = \overline{z} i$, $H_1 z = z$, $H_2 z = z$, $H_3 z = -\overline{z} i$, $h_0 = 0$, $h_1 = i$, $h_2 = 1 + i$, $h_3 = 2 + i$ である．H_j, h_j で (2.3.6) 式を置き換えると，$H_{q_1} H_{q_2} \ldots H_{q_n} 0 = 0$ と $H_{q_0} z = z$ より

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \ldots \mathfrak{H}_{q_n} 0 &= \frac{1}{2} H_{q_1} \{\mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \ldots \mathfrak{H}_{q_n} 0\} + \frac{1}{2} h_{q_1} \\
&= \frac{1}{2} H_{q_1} \left\{ \frac{1}{2} H_{q_2} [\mathfrak{H}_{q_3} \ldots \mathfrak{H}_{q_n} 0] + \frac{1}{2} h_{q_2} \right\} + \frac{1}{2} h_{q_1} \\
&= \frac{1}{2} H_{q_1} \left\{ \frac{1}{2} H_{q_2} \left[\frac{1}{2} H_{q_3} (\mathfrak{H}_{q_4} \ldots \mathfrak{H}_{q_n} 0) + \frac{1}{2} h_{q_3} \right] + \frac{1}{2} h_{q_2} \right\} + \frac{1}{2} h_{q_1} \\
&= \ldots \\
&= \left(\frac{1}{2^n}\right) H_{q_1} H_{q_2} H_{q_3} \ldots H_{q_n} 0 + \left(\frac{1}{2^n}\right) H_{q_1} H_{q_2} H_{q_3} \ldots H_{q_{n-1}} h_{q_n} \\
&\qquad + (1/2^{n-1}) H_{q_1} H_{q_2} H_{q_3} \ldots H_{q_{n-2}} h_{q_{n-1}} + \cdots + (1/2) h_{q_1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^j}\right) H_{q_0} H_{q_1} H_{q_2} H_{q_3} \ldots H_{q_{j-1}} h_{q_j}
\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$f_h(0_4^{.} q_1 q_2 q_3 \ldots q_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^j}\right) H_{q_0} H_{q_1} H_{q_2} \ldots H_{q_{j-1}} h_{q_j}$$

であり，f_h の連続性を考えると，

$$f_h(0_4^{.} q_1 q_2 q_3 \ldots) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right) H_{q_0} H_{q_1} H_{q_2} \ldots H_{q_{j-1}} h_{q_j} \tag{2.3.8}$$

となる．$H_1 z = H_2 z = z$, $H_0^2 z = H_3^2 z = -z$ より，

$$H_1, H_2, H_0^2 \quad と \quad H_3^2$$

のすべての項を取り除こう．$H_0 H_3 z = H_3 H_0 z$ に注意すれば，簡単な式

$$f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right) H_0^{e_{0j}} H_3^{e_{3j}} h_{q_j} \tag{2.3.9}$$

を導く．ここで，$k = 0$ または 3 に対して，

$$e_{kj} = q_j \text{ の前までの } k \text{ の数 (mod 2)} \tag{2.3.9a}$$

である．

これは $\frac{1}{2}$ のべき乗による展開式であるが，いくつかの係数が負となるので，像点の 2 進表現ではない．

有限の 4 進数が，3 を繰り返した無限の 4 進数として，

$$0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_nq = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n(q-1)\overline{3}$$

と記述できるので，(2.3.9) 式は，いずれにしても同じ結果になることを確かめなければならない．(2.3.9) 式から

$$f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_nq) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^j}\right) H_0^{e_{0j}} H_3^{e_{3j}} h_{q_j} + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) H_0^{e_{0,n+1}} H_3^{e_{3,n+1}} h_q \right\}$$

を得，そして，

$$\begin{aligned} f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n(q-1)\overline{3}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \Bigg\{ &\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^j}\right) H_0^{e_{0j}} H_3^{e_{3j}} h_{q_j} \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) H_0^{e_{0,n+1}} H_3^{e_{3,n+1}} h_{q-1} \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n+2}}\right) H_0^{e_{0,n+1}} H_3^{e_{3,n+1}} H_{q-1} \left(h_3 + \frac{1}{2}H_3h_3 + \frac{1}{4}h_3 + \frac{1}{8}H_3h_3 + \cdots\right) \Bigg\} \end{aligned}$$

となる．

$$\left(I + \frac{1}{2}H_3 + \frac{1}{4}I + \frac{1}{8}H_3 + \cdots\right) h_3 = 2$$

と，$q = 1, 2, 3$ に対して，

$$h_q = h_{q-1} + \frac{1}{2} H_{q-1}(2)$$

となるので,

$$f_h(0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots q_n q) = f_h(0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots q_n (q-1)\overline{3})$$

を得る.

(2.3.1) 式から (2.3.4) 式までの変換式より,

$$\begin{aligned} H_0 z &= i\overline{z} = \exp(i\pi/2)\overline{z} \\ H_1 z &= z \\ H_2 z &= z \\ H_3 z &= -i\overline{z} = \exp(-i\pi/2)\overline{z} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

であり,

$$\begin{aligned} h_n &= \mathrm{sgn}(n)[(n-1)+i] \\ &= \mathrm{sgn}(n)\sqrt{1+(n-1)^2}\exp(i\ \arcsin[1/\sqrt{1+(n-1)^2}]) \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

となる. ここで, $\mathrm{sgn}(n) = \left\{ \begin{matrix} 0,\ n = 0 \text{ のとき} \\ 1,\ n > 0 \text{ のとき} \end{matrix} \right\}$ である. (2.3.10) 式から

$$H_3^{e_{3j}} h_{q_j} = \mathrm{sgn}(q_j)\exp(-i\pi e_{3j}/2)[(q_j-1)+(-1)^{e_{3j}} i]$$

であり, e_{kj} は (2.3.9a) 式により定義されているので,

$$d_j = e_{0j} + e_{3j} \pmod 2 \tag{2.3.12}$$

となり,

$$\begin{aligned} H_0^{e_{0j}}(H_3^{e_{3j}} h_{q_j}) &= (-1)^{e_{3j}}\mathrm{sgn}(q_j)\exp[i\pi d_j/2][(q_j-1)+(-1)^{d_j} i] \\ &= (-1)^{e_{3j}}\mathrm{sgn}(q_j)\sqrt{(q_j-1)^2+1]} \\ &\quad \times \exp[i\pi d_j/2 + i(-1)^{d_j}\arcsin(1/\sqrt{(q_j-1)^2+1)}] \end{aligned}$$

を得る. (2.3.9) 式へ代入すると, ヒルベルト曲線の次の複素表現 (パラメー

タ化)

$$\begin{aligned}&\varphi_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots)+i\psi_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{e_{3j}}}{2^j}\operatorname{sgn}(q_j)\sqrt{(q_j-1)^2+1)}\\&\qquad\times\exp[i\pi d_j/2+i(-1)^{d_j}\arcsin(1/\sqrt{(q_j-1)^2+1})]\end{aligned}\tag{2.3.13}$$

を得る．ここで，d_j は (2.3.12) 式によって定義されている．

§2.4　ヒルベルト曲線の算法

(2.3.1) 式から (2.3.4) 式までの変換式を実部と虚部に分解すると，次の相似変換を得る．

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_0\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}H_0\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}h_0\\\mathfrak{H}_1\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}H_1\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}h_1\\\mathfrak{H}_2\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}H_2\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}h_2\\\mathfrak{H}_3\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}H_3\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}h_3.\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

これらは，ヴンダーリヒが発表した変換式である（Wunderlich[1], [3] を参照．また，Strubecker[1](p.697 以降) も参照）．異なる式によって定義されるが，同じ目的をなすため，$\mathbb{E}^2$ 内の対応する変換と同じく，複素平面での変換に対して同じ記号を使用した．新たな解釈で，

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{H}_0^n\mathcal{Q}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}H_0^n\mathcal{Q}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^n\mathcal{Q}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となることがわかり，(2.3.9) 式は，変わらず，

$$f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^j}\right)H_0^{e_{0j}}H_3^{e_{3j}}h_{q_j} \tag{2.4.2}$$

となる．

$q_j = 1,2,3$ に対して，すべての可能性 $(e_{0j}, e_{3j}) = (0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ を調べ，$q_j = 0$ が項 $H_0^{e_{0j}}H_3^{e_{3j}}h_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を導くことをみると，(2.4.2) 式は，

$$f_h(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty}(1/2^j)(-1)^{e_{0j}}\mathrm{sgn}(q_j)\begin{pmatrix}(1-d_j)q_j-1\\1-d_jq_j\end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

となる 4 進数 q_j によって記述できることを，簡単に確認できる．ここで，e_{kj} は (2.3.9a) 式で定義され，d_j は (2.3.12) 式で定義される．この式は，(2.3.13) 式から直接導くことができる．$e_{3j}+d_j = e_{0j}$ (mod 2) に注意しよう．(2.4.3) 式は，$d_j = 1-\delta_j$ によって，Sagan[5] の (4) 式から得られている．ここで，$e_{0j} = e_{3j}$ であれば，$\delta_j = 1$ となり，$e_{0j} \neq e_{3j}$ であれば $\delta_j = 0$ となる．

(2.4.3) 式における総和の項の分子の計算が整数の乗算と減算のみなので，計算機の精度が高い限り，分母に 2^n を持った分数の形で，すべての有限な $t = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots q_n$ の正確な像を求めることができる．同様に，原理的にいかなる精度でも，任意の $t \in \mathcal{I}$ に対する像の座標を推定計算することができる．付録 A.1.1（プログラム 1）に，BASIC 言語を使った (2.4.3) 式を評価するための計算機プログラムを載せた．読者はそれを，好みのプログラミング言語に翻訳し，実際に試して欲しい．

(2.4.3) 式の利用を説明するため，$f_h(0_{\dot{4}}203)$ を求めよう．(2.3.9a) 式から，$e_{01} = 0$，$e_{02} = 0$，$e_{03} = 1$，$e_{31} = 0$，$e_{32} = 0$，$e_{33} = 0$ であり，(2.3.12) 式から，$d_1 = 0$，$d_2 = 0$，$d_3 = 1$ である．したがって，

$$\begin{aligned}f_h(0_{\dot{4}}203) &= (1/2)(-1)^0\begin{pmatrix}1\times2-1\\1\end{pmatrix} + 0 + (1/8)(-1)^1\begin{pmatrix}0-1\\1-1\times3\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/8\\1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/8\\3/4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これは，1 回目の分割の 3 番目の部分正方形内であり，2 回目の分割の 1 番

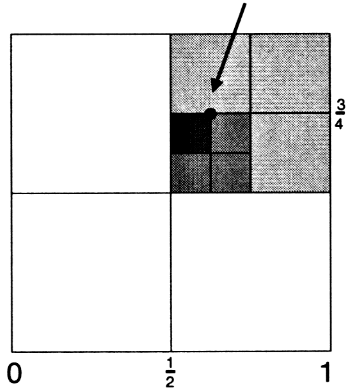


図 2.4　$0_4 203$ の像

目の部分正方形内であり，3 回目の分割の 4 番目の部分正方形への入る点を表している（図 2.4 を参照）．

§2.5　ヒルベルト曲線のいたるところ微分不可能性の解析的証明

2.2 節では，ヒルベルト曲線のいたるところ微分不可能性を証明した．その証明は，ある意味では幾何的洞察によった．これを好ましく思わない人に対して，ここでは，(2.4.3) 式のヒルベルト曲線の表現に基づく解析的証明を示す (Sagan[9])．

定理 (2.5)　(2.4.3) 式によって表されるようなヒルベルトの空間充填曲線の座標関数は，いたるところ微分不可能である．

証明　第 1 軸 φ_h に対する証明を与えよう．ψ_h に対する証明は，同様に続けることができる．(2.4.3) 式の総和内のベクトルの第 1 軸に対する簡略化した記述

$$d(d_j, q_j) = (1 - d_j)q_j - 1$$

を導入しよう．このとき，$q_j = 1, 2, 3$ に対して，

$$d(1, q_j) = -1; \quad d(0,1) = 0,\ d(0,2) = 1,\ d(0,3) = 2 \tag{2.5.1}$$

である．

$t = 0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots \in [0,1]$ としよう．ここでは，次の 3 つの場合に分けなければならない．

(i) t の 4 進表現で，無限に多くの 1 と 2 が存在する．4 進点 (quaternary point)[2] 後の最初の 1 または 2 を q_{k_1} で表し，第 2 の 1 または 2 を q_{k_2} で表し，これを続けて，また，

$$\underline{t}_n = 0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k_n - 1} 0, \quad \bar{t}_n = 0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k_n - 1} 3$$

としよう．そのとき，

$$\bar{t}_n - \underline{t}_n = 3/4^{k_n}$$

となる．(2.4.3) 式と (2.5.1) 式より，

$$|\varphi_h(\bar{t}_n) - \varphi_h(\underline{t}_n)| = |(-1)^{e_{0k_n}} d(d_{k_n}, 3)/2^{k_n}| \geq 1/2^{k_n}$$

を得る．したがって，$n \to \infty$ のとき，

$$|(\varphi_h(\bar{t}_n) - \varphi_h(\underline{t}_n))/(\bar{t}_n - \underline{t}_n)| = 2^{k_n}/3 \longrightarrow \infty,$$

すなわち，φ_h は t で微分可能でない．

(ii) t の 4 進表現は，無限に多くの 3 を含む．これは，無限に多くの 3 が続く無限の表現によって置き換えられる，すべての有限の 4 進表現（0 以外）を含む．特に，$1 = 0_{\dot{4}}\bar{3}$ である．

4 進点後に現れ，3 の前に 0 と 3 が偶数個ある最初の数 3 を q_{k_1} と表し，また 4 進点後に現れ，3 の前に 0 と 3 が偶数個ある 2 番目の数 3 を q_{k_2} と表し，同様に続ける．

$$t = 0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k_n - 1} 3 q_{k_n + 1} \ldots$$

より，

$$t_{k_n} = 0_{\dot{4}} q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k_n - 1} 0$$

---

2 ［訳註］小数点と同じ．

としよう．このとき，

$$t - t_{k_n} = 0_{\dot{4}}000\dots03q_{k_n+1}\dots \le 1/4^{k_n-1}$$

であり，(2.4.3) 式によって，

$$\begin{aligned}\varphi_h(t) - \varphi_h(t_{k_n}) &= (-1)^{e_{0k_n}}/2^{k_n-1} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}[(-1)^{e_{0k_n+m}}/2^{k_n+m}]\mathrm{sgn}(q_{k_n+m})d(d_{k_n+m}, q_{k_n+m}) \\ &= (-1)^{e_{0k_n}}/2^{k_n-1} + [(-1)^{e_{0k_n}}/2^{k_n}]\sum_{m=1}^{\infty}[(-1)^{e_{0m}}/2^m] \\ &\times\mathrm{sgn}(q_{k_n+m})d(d_m, q_{k_n+m}) \\ &= (-1)^{e_{0k_n}}/2^{k_n-1} + [(-1)^{e_{0k_n}}/2^{k_n}]\varphi_h(0_{\dot{4}}q_{k_n+1}q_{k_n+2}q_{k_n+3}\dots).\end{aligned}$$

となる．$|\varphi_h(t)| \le 1$ なので，

$$|\varphi_h(t) - \varphi_h(t_{k_n})| \ge 1/2^{k_n-1} - 1/2^{k_n} = 1/2^{k_n}$$

を得る．したがって，$n \to \infty$ のとき，

$$|(\varphi_h(t) - \varphi_h(t_{k_n}))/(t - t_{t_{k_n}})| \ge 2^{k_n-2} \longrightarrow \infty$$

であり，φ_h は t で微分不可能である．

(iii)　$t=0$ の場合．$t_n = 3/4^n$ としよう．このとき，$|0 - t_n| = 3/4^n$ であり，

$$|\varphi_h(0) - \varphi_h(t_n)| = |[(-1)^{e_{0n}}/2^n]d(d_n, 3)| \ge 1/2^n$$

である．したがって，$n \to \infty$ のとき，

$$|(\varphi_h(0) - \varphi_h(t_n))/(0 - t_n)| \ge 2^n/3 \longrightarrow \infty$$

であり，φ_h は 0 において微分不可能である．

これですべての可能性が消え，定理は証明された．　□

§2.6　ヒルベルト曲線に対する近似多角形

図 2.1.1 の各部分正方形内において，ヒルベルト曲線上の点と，部分正方

形内にある太い多角線 (polygonal line) の部分上の点の間の距離は，部分正方形の対角線でおさえられる．多角線の始点から原点までと，その終点から点 $(0,1)$ までの線分によって，連続的にこれらの多角形を拡張すると，それらは，$\mathcal{I}$ 上で一様にヒルベルト曲線を近似できる．(W. Wunderlich[3] のような) 何人かの著者によって，それらは近似多角形 (approximating polygon) と呼ばれるようになった．一方，ムーア (Moore[1]) は，それと対照的に**節** (node)（あるいは**節点** (nodal point)），すなわち，$\mathcal{I}$ の分割点の像をつないだ多角線を，近似多角形と呼んでいる．ここでは，ザーガン (Sagan[5], [6]) による同じ用語を採用した．特に，

定義 (2.6)　点 $f_h(0)$, $f_h(1/2^{2n})$, $f_h(2/2^{2n})$, $f_h(3/2^{2n})$, ..., $f_h((2^{2n}-1)/2^{2n})$, $f_h(1)$ をつなぐ多角線は，ヒルベルト曲線の n 次近似多角形と呼ばれる．

図 2.6.1 において最初の 3 つの近似多角形を描いた．これらの多角形は，性質上，それら自身に突き当たったり，時々2 重に重なるので，進んで行く順にたどることが難しい．この問題を改善するために，近似多角形の個々の線分に矢印をつけた．(矢印は，ヒルベルト曲線が隣接線分によって近似される部分正方形の内部についている.)

近似多角形 $p_n : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ を，

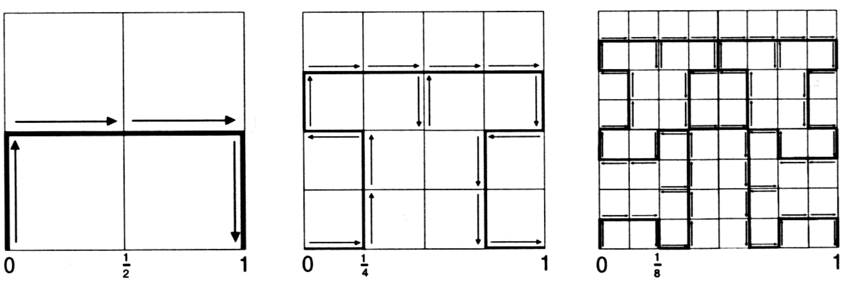


図 2.6.1　ヒルベルト曲線に対する近似多角形

$$k/2^{2n} \leq t \leq (k+1)/2^{2n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots 2^{2n} - 1$$

に対して,

$$p_n(t) = 2^{2n}(t - \frac{k}{2^{2n}})f_h\left(\frac{k+1}{2^{2n}}\right) - 2^{2n}\left(t - \frac{k+1}{2^{2n}}\right)f_h\left(\frac{k}{2^{2n}}\right) \quad (2.6.1)$$

としてパラメータ化する．また，すべての $t \in \mathcal{I}$ に対して，

$$\|f_h(t) - p_n(t)\| \leq \sqrt{2}/2^n,$$

すなわち，$\{p_n\}$ がヒルベルト曲線に一様に収束することがわかる．p_n は連続なので，これにより，ヒルベルト曲線の連続性に関する代わりの証明ができる（付録 A.2.4 を参照）．同様のことは，図 2.1.1 の多角線から作られ，この節の最初で述べた近似多角形を使ってもできる．

正方形 $\mathcal{Q}$ が，2^{2n} 個の辺長 $1/2^n$ を持つ同じ合同部分正方形に分割され，各部分正方形が，n 次近似多角形の一片を含むので，n 次近似多角形の長さは 2^n であることがわかる．長さ ℓ をヒルベルト曲線に割り当てることに意味があるとすれば，すべての n に対して $\ell > 2^n$ となる．さらに，時間としてパラメータ t を解釈すると，1 時刻に全ヒルベルト曲線をたどることは可能である．これは，ヒルベルト曲線がいたるところ微分不可能であり，したがって，速度をこの「動き (motion)」に割り当てることが意味のないことなので，矛盾ではない．

(2.6.1) 式で定義され，$n = 1, 2, 3,$ に対して図 2.6.1 で図示されるような近似多角形は，変換 (2.4.1) 式を繰り返し適用することによって，(0,0) から (1,0) への（方向づけられた）線分から再帰的に求められる．極限 $n \to \infty$ において，ヒルベルト曲線は得られる．そのような方法で再帰的に得られる点集合は，**フラクタル** (fractal) と言われている．そこで，ヒルベルト曲線は，**初期集合** (initial set) として (0,0) から (1,0) までの線分を持ったフラクタルとして考えられるかもしれない．その初期集合に対して，**ライトモティフ** (Leitmotiv) がより合った名前であることがわかる（第 9 章を参照）．

(0,0) で正方形 $\mathcal{Q}$ に入り，(1,0) で出る任意の曲線が，近似曲線の作り方に関してライトモティフとして働いていることを見てみよう．図 2.6.2 においてライトモティフとして二等辺三角形を持つ第 2 の近似曲線を描いた．また，

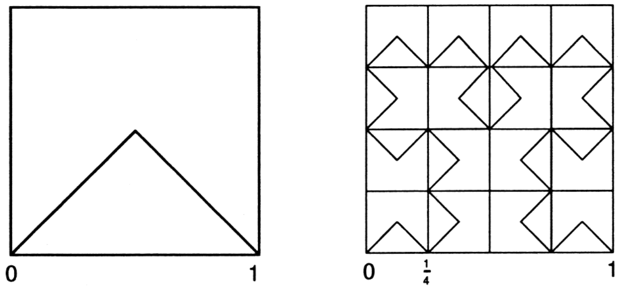


図 2.6.2 ライトモティフと 2 次近似曲線

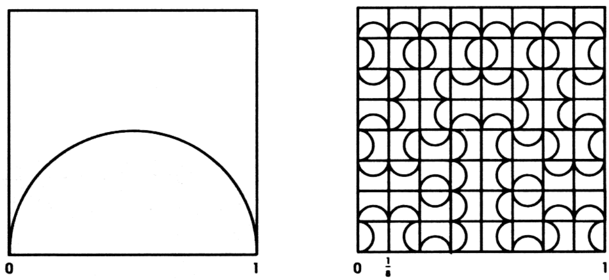


図 2.6.3 ライトモティフと 3 次近似曲線

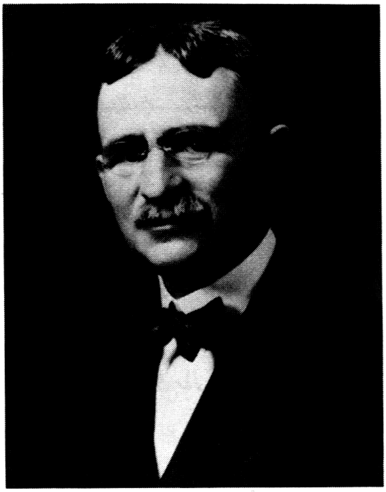
図 2.6.3 ではライトモティフとして半円を持った第 3 の近似曲線を描いた．

§2.7 ヒルベルト曲線のムーア版

$\mathcal{I}$ と $\mathcal{Q}$ の連続する分割によって，$\mathcal{I}$ から $\mathcal{Q}$ への空間充填曲線を定義することができる．すなわち，$\mathcal{Q}$ を 2^{2n} 個のレプリカ（複製）へ分割し，n 次の写像が $(n-1)$ 次の写像を保存するように共通の辺を持って，隣接する部分線分が隣接する部分正方形に写像されるように，部分正方形を並べることができる．それから，$\mathbb{E}$ 内の点の縮小区間の性質と $\mathbb{E}^2$ 内の点の縮小正方形の性質を利用することによって，各関数値を定義することは可能である．これは，平面図を一連のレプリカ（Gardner[2] と Golomb[1]）に切り，それらを

ある規則的な方法で配置することができるならば，他の空間充填曲線が同じ一般的原理から得られるだろうということを示している．3.1節から3.7節においては，正方形が9個の部分正方形に切られる場合，4.1節から4.5節においては，直角二等辺三角形が2個のレプリカに切られる場合を扱う．4.6節では，直角であるが，二等辺ではない三角形が2個の類似した合同でない三角形に切られる場合を扱う．問題2.2では，ある台形を4個の合同レプリカに切ることにより空間充填曲線を構成する方法を読者に問う．

ムーア(Moore[1])は，ヒルベルトの空間充填曲線が，2^{2n}個のレプリカへの連続分割後の部分正方形を並べる唯一の方法ではないことを示した．(回転や反転を除いて，曲線の終点が始点から水平方向あるいは垂直方向に1単位だけ離れたところにあるようにしたいのならば，ヒルベルトの方法が唯一のものである.)



エリアキム・ヘイスティングズ・ムーア(1862–1932)は，オハイオ州マリエッタに生まれ，シカゴに没した．彼はエール大学でH. A. ニュートンのもとで研究をし，1885年に博士号を取得した．ムーアの能力に深く感銘したニュートンは，ゲッティンゲン大学とベルリン大学において，1年間彼を援助した．ゲッティンゲンにおいて，H. ウェーバー，H. A. シュバルツ，F. クラインに会い，ベルリンでは，K. ワイエルシュトラスとL. クロネッカーに会った．(後の1899年，彼はゲッティンゲン大学から名誉博士号を受けた.) 彼は1886年に講師としてノースウェスト大学の教官になった．その後エール大学に戻り，助講師として1年間働いた．1889年にはノースウェスト大学に助教授として戻った．1891年，準教授に昇格し，1892年にはシカゴ大学に教授と数学教室の主任として移った．1896年には常任となり，1931年に退職するまでこの地位にあった．彼の数学への主な功績は，幾何，代数，群論，整数論，解析（積分方程式）においてである．シカゴ大学における数学教育を発展させたばかりでなく，それ以上にアメリカの数学の発展に大きく貢献した．変分法のアメリカ学派(American School of the Calculus of Variations)を創設したO. ボルツァ

をシカゴにつれてきた．その学派からは，G. ブリス，M. ヘスティンス，E. J. マックシェインのような有名な学士が世に出た．ムーアの博士課程に学んだ学生の長い一覧の中には，L. E. ディクソン，D. N. レーマー，O. ヴェブレン，G. D. バーコフのような有名な名前が見つかる．1894 年，地方のニューヨーク数学会をアメリカ数学会に変えるのに影響を与えた．1899 年から 1907 年まで，雑誌 *Transactions of the American Mathematical Society* の編集長の 1 人であった．その第 1 巻には前述の参考論文や，3.2 節と 3.3 節でふれる論文を含んでいる．(より詳しくは，Calinger[1] と Bliss and Dickson[1] を参照.)

ムーアは，図 2.7 で，最初の 4 ステップで切り取られた部分正方形の列挙を示した．この方法により得た空間充填曲線は，原点から始まり，点 (1,0) に

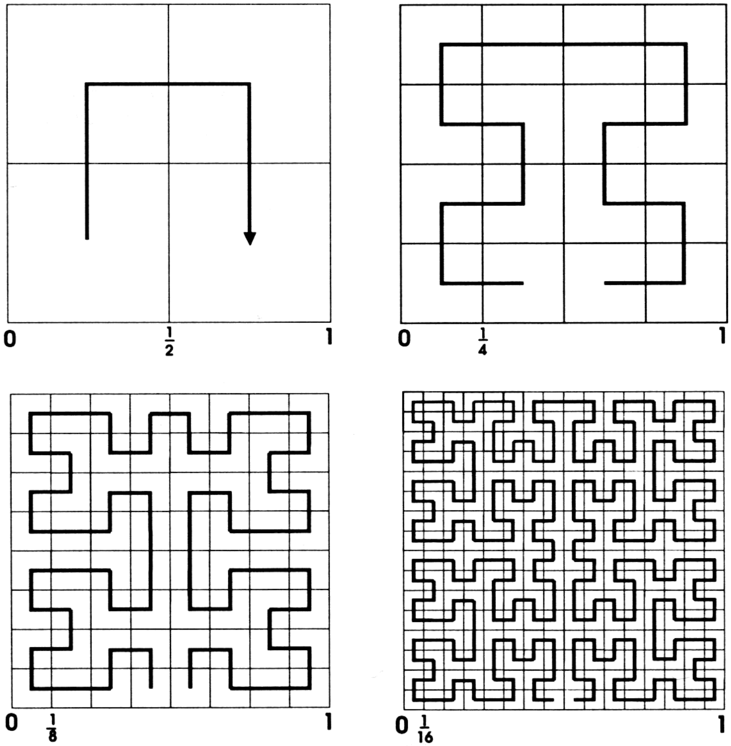


図 2.7 ヒルベルトの空間充填曲線のムーア版

終わるヒルベルト曲線と違って，点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ から始まり，同じ点に終わることに注意して欲しい．

§2.8 3次元ヒルベルト曲線

3次元ヒルベルト曲線の定義は，$\mathcal{I}$ を各ステップで 2^{3n} 個の合同部分区間に分割し，単位立方体 $\mathcal{W}$ を 2^{3n} 個の部分立方体に分割することが異なるだけで，2.1節と同様である．(Sagan[8] を参照.) 第1ステップにおいて，図2.8.1に示されるように部分立方体を並べる．多角線は，その望ましい順序に8個の部分立方体の中点をつなぐ．次のステップは，図2.8.2に示される．この図では，図2.8.1からの締め金線のような多角形の像は太線で引き，連結線は細線で引いている．(図の重複をさけるため，正方形や部分正方形，座標軸を省いた.)

この過程は，隣接部分区間が，共通面を持った隣接部分立方体へ写像され，各写像が前の写像を保存するという空間充填曲線の定義における必要性を満たしている．2.1節で示したように，縮小区間の性質と縮小立方体の性質によって，空間充填曲線を定義できる．この方法で得られる曲線の終点は，始

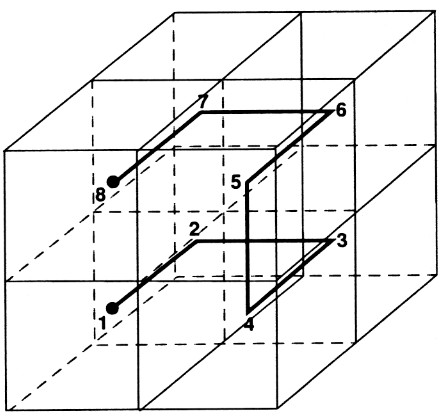


図 2.8.1　3次元ヒルベルト曲線の生成における第1ステップ

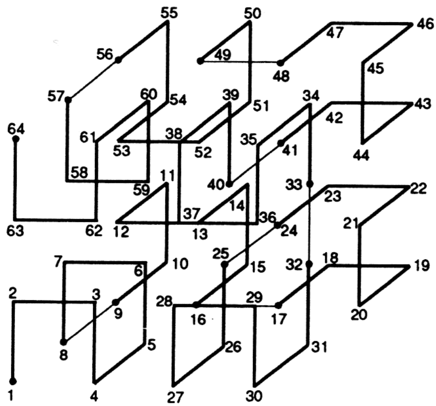


図 2.8.2　3 次元ヒルベルト曲線の生成における第 2 ステップ

点から垂直に 1 単位上にある．

この曲線の代数的・解析的表現を得るため，2.3 節と 2.4 節と同じように議論を進める．原点を $\mathcal{W}$ の左下前方の角，ξ 軸を右方向に，η 軸を後ろ方向に，ζ 軸を上方向にとった座標系を設定する．点 $t \in \mathcal{I}$ は，8 進数によって

$$t = 0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$$

と表現されていると仮定する．ここで，$\omega_j = 0,1,2,3,4,5,6,7$ である．この曲線の構成を見ると，t の像は，最初の分割による $(\omega_1 + 1)$ 番目の部分立方体内にあり，同様に続く最初の分割による $(\omega_1 + 1)$ 番目の部分立方体に対する 2 回目の分割での $(\omega_2 + 1)$ 番目の部分立方体内にあり，同様に続く．最初の分割による部分立方体は，図 2.8.2 で締め金線のような多角形で示したように方向づけられ，相似変換によって $\mathcal{W}$ から得られる．2 回目の分割による部分立方体は，すでに分割した立方体 $\mathcal{W}$ に対して，相似変換の適用により得られる．以下，同様に続く．

$\mathcal{W}$ を最初の分割の第 1 部分立方体に写像する相似写像を $\mathfrak{H}_0$ とし，$\mathcal{W}$ を第 2 部分立方体に写像する変換を $\mathfrak{H}_1$ などとする．t の像を $f_h^{(3)}(t)$ とすると，

$$0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \omega_n = 0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \omega_n 000 \ldots$$

によって，

$$f_h^{(3)}(0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n) = \mathfrak{H}_{\omega_1}\mathfrak{H}_{\omega_2}\mathfrak{H}_{\omega_3}\ldots\mathfrak{H}_{\omega_n}\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\ldots\mathcal{W} \tag{2.8.1}$$

を得る．$\mathcal{W}$ から図 2.8.2 の最初の（方向づけられた）部分立方体を得るため，図 2.8.1 の締め金線のような多角形を，図 2.8.2 の左下前方の角の多角形に変換しなければならない．これは，$\mathcal{W}$ の各次元における 2 : 1 比での縮小，ξ 軸まわりの 90° 回転，そして (ξ, ζ) 平面に関する反転：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$

によって成し遂げられる．第 2 の部分立方体を得るには，同様の $\mathcal{W}$ の各次元における縮小，η 軸まわりの 90° 回転，(η, ζ) 平面に対する反転，η 軸の方向に $\frac{1}{2}$ 単位だけの結果の移動：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

とすればよい．この方法を続けて，最終的に以下を得る．

$$\mathfrak{H}_0\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_0x + \frac{1}{2}h_0$$

$$\mathfrak{H}_1\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_1x + \frac{1}{2}h_1$$

$$\mathfrak{H}_2\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_2x + \frac{1}{2}h_2$$

$$\mathfrak{H}_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\ -1&0&0\\ 0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_3x+\frac{1}{2}h_3$$

$$\mathfrak{H}_4\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-1\\ -1&0&0\\ 0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_4x+\frac{1}{2}h_4$$

$$\mathfrak{H}_5\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_5x+\frac{1}{2}h_5$$

$$\mathfrak{H}_6\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-1\\ 0&1&0\\ -1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_6x+\frac{1}{2}h_6$$

$$\mathfrak{H}_7\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}H_7x+\frac{1}{2}h_7.$$

($\mathcal{W}$ は，変換 $\mathfrak{H}_* : K(\mathbb{E}^3) \to K(\mathbb{E}^3)$ の唯一の「不動点」を持つことが 9.3 節においてわかるであろう．ここで，$K(\mathbb{E}^3)$ は $\mathfrak{H}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=0}^{7} \mathfrak{H}_{i*}(\mathcal{A})$（ただし，$\mathcal{A} \in K(\mathbb{E}^3)$）によって定義される $\mathbb{E}^3$ の空でないコンパクト部分集合の空間である.)

$$\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\ldots\mathcal{W} = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{H}_0^n\mathcal{W} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}H_0^n\mathcal{W} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より，H_j と h_j を (2.8.1) 式に代入し，$H_{\omega_0} = I$ とした後，

$$f_h^{(3)}(0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}H_{\omega_0}H_{\omega_1}H_{\omega_2}\ldots H_{\omega_{j-1}}h_{\omega_j}$$

と，その結果として，

$$f_h^{(3)}(0_{\dot{8}}\omega_1\omega_2\omega_3\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} H_{\omega_0} H_{\omega_1} H_{\omega_2} \ldots H_{\omega_{j-1}} h_{\omega_j} \qquad (2.8.2)$$

を得る．$H_2 = H_5 = H_0^2 = H_1^2 = H_6^2 = H_7^2 = H_3^3 = H_4^3 = I$ であるが，(2.4 節で示したような）これ以上の簡素化はできない．なぜならば，行列積 H_iH_j は，一般に可換でないからである．よって，2.4 節において行ったように，同じ添え字の要素を集めることができない．さらに，(2.8.2) 式は計算機によって評価できるが，その評価は，整数の加減乗を含むだけでなので，節点の正確な座標が計算機の精度が高い限り，分母に 2^n を持った分数として得られる．3 次元ヒルベルト曲線を得るための他の方法（そしてより高次元のヒルベルト曲線）は，6.9 節において議論されるであろう．Butz[1] を参照．

§2.9　問題

1. $q = 1, 2, 3$ に対して $h_q = h_{q-1} + \frac{1}{2}H_{q-1}(2)$ を示せ．
2. (2.3.9) 式によって $f_h(0_{\dot{4}}203)$ と $f_h(0_{\dot{4}}10321)$ を評価しなさい．
3. $$\begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} (-1)^{e_{3j}} \mathrm{sgn}(q_j) \sqrt{(q_j-1)^2+1}$$
$$\times \exp[i\pi d_j/2 + i(-1)^{d_j} \arcsin(1/\sqrt{(q_j-1)^2+1})]$$
$$= (-1)^{e_{0j}} \mathrm{sgn}(q_j) \begin{pmatrix} (1-d_j)q_j - 1 \\ 1 - d_j q_j \end{pmatrix}$$ を示しなさい．ここで,e_{kj}は (2.3.9a) 式で定義され，また，d_jは (2.3.12) 式で定義される．
4. (2.4.3) 式を使って，$f_h(0_{\dot{4}}03021)$，$f_h(0_{\dot{4}}00001)$，$f_h(0_{\dot{4}}33333)$ を求めなさい．
5. $t = 0_{\dot{4}}1023032$ としよう．$\sum_{j=5}^{\infty}(1/2^j)(-1)^{e_j}\mathrm{sgn}(q_j)\begin{pmatrix} (1-d_j)q_j - 1 \\ 1 - d_j q_j \end{pmatrix}$ を評価しなさい．ここで，d_j は (2.3.12) 式により定義される．また，その結果を，$f_h(0.032)$ あるいは $g_h(0.032)$ と比較しなさい．ここで，g_h は，f の要素の相互変更によって f_h から得られる．$t = 0_{\dot{4}}3001201$ に対して同様に行いなさい．
6. 2.8 節に示される相似変換 $\mathfrak{H}_0$ から $\mathfrak{H}_7$ までを検証しなさい．

7. (2.8.2) 式を評価する計算機プログラムを書きなさい．また，次の値を求めなさい． $f_h^{(3)}(0_{\dot{8}}000000001)$, $f_h^{(3)}(0_{\dot{8}}01234567)$, $f_h^{(3)}(0_{\dot{8}}777777777)$.
8. $\mathcal{Q}$ 内のすべての点が，写像 f_h の下で，$\mathcal{I}$ 内にせいぜい 4 個の前像しか持たない理由を説明しなさい．
9. $f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるように，$(-\infty, \infty)$ から細長い切れ (strip) $0 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < \infty$ 上への連続写像をみつけなさい．

 （空間充填曲線による，2 次元やさらにより高次元領域のパラメータ化の雑多な応用に関しては，Abend, Harley, and Kanal[1]，Butz[1], [2], [3]，Patrick, Anderson, and Bechtel[1]，Bially[1]，Bartholdi and Platzman[1], [2], [3], [4]，Bertsimas and Grigni[1] を参照.）
10. $f_h = \begin{pmatrix} \varphi_h \\ \psi_h \end{pmatrix}$ により，$\int_0^1 \varphi_h(t)\,dt$ と $\int_0^1 \psi_h(t)\,dt$ を求めなさい．
11. 図 2.9 の台形を 4 つの合同レプリカ（複製）に切り取ることによって，空間充填曲線を構成しなさい．(この問題は Mioduszewski[2] からとられている．また，Golomb[1] を参照.)

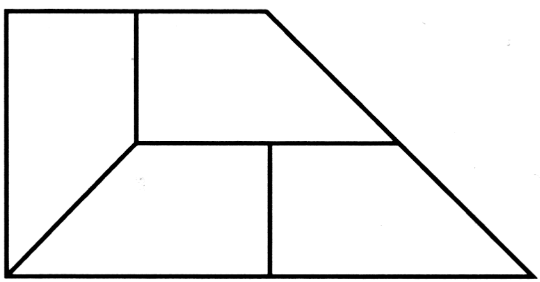


図 2.9 台形の切り取り

12. ヒルベルト曲線の座標関数 φ_h, ψ_h は，次の関数方程式

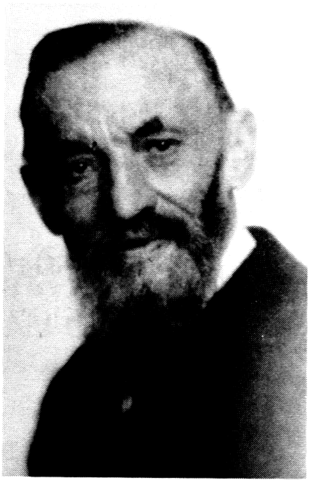
$$\begin{aligned} \varphi_h(t/4) &= (1/2)\psi_h(t) \\ \psi_h(t/4) &= (1/2)\varphi_h(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_h((1+t)/4) &= (1/2)\varphi_h(t) \\
\psi_h((1+t)/4)) &= 1/2+(1/2)\psi_h(t)) \\
\varphi_h((2+t)/4) &= 1/2+(1/2)\varphi_h(t) \\
\psi_h((2+t)/4) &= 1/2+(1/2)\psi_h(t) \\
\varphi_h((3+t)/4) &= 1-(1/2)\psi_h(t) \\
\psi_h((3+t)/4) &= 1/2-(1/2)\varphi_h(t) \\
\varphi_h(t)+\varphi_h(1-t) &= 1 \\
\psi_h(t) &= \psi_h(1-t)
\end{aligned}
$$

を満たすことを示しなさい.

第 3 章　ペアノの空間充填曲線

§3.1　ペアノの空間充填曲線の定義



ジュゼッペ・ペアノ (1858–1932) はイタリアのシュピネッタに生まれ，トリノに歿した．1880 年，トリノ大学で研究論文を完成し，1890 年には教授となった．彼は，亡くなるまでその地位にあった．また，彼は，記号論理や公理的方法における先駆的研究，数学的解析への貢献で知られている．

集合要素に「∈」を導入し（ギリシャ語の単数の連辞 '$\epsilon\sigma\tau$ の頭文字），「であるように (such that)」に「∋」を導入したのはペアノであった．B. ラッセルはかつて，ブールなるもの (Boolean stuff) を知っており，無用なことがわかっていたので，ペアノに連絡をとるまで，記号論理が数学の原理に有用であるとは思いもよらなかったと述べている．ペアノの最もよく知られた解析への貢献は，（リプシッツ条件なしで）1 次微分方程式系の解の存在を証明したことである．『算術原理 (*Arithmetices principia*)』において，彼は，算術的論理的記号により表された明確な公理として，自然数の算術に基礎を与えた．ペアノ自身はデデキントのおかげだとしているが，それを「ペアノの公理 (Peano's axioms)」という表現を使う．イボル・グラッテン・ギネス (Ivor Grattan-Guiness[1, p.27]) は，ペアノが反例を見い出したり，他の数学者が見落していた集合論の特質を指摘したり，概念の解明における言語解析の利用を思いついたりしたすぐれた能力を指摘し，ペアノを賞賛している．しかし，彼は，大規模な数学的理論の体系的概念家ではなく，首尾一貫した哲学的体系を構成した者でもな

かった.(詳しくは, Kennedy[1], Orman Quine[1], Grattan-Guiness[1] を参照.)

ペアノ (Peano[1]) は, 演算子

$$kt_j = 2 - t_j (t_j = 0, 1, 2)$$

によって, $\mathcal{I}$ から $\mathcal{Q}$ への写像 f_p を,

$$f_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3t_4\ldots) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\ldots \\ 0_{\dot{3}}(k^{t_1}t_2)(k^{t_1+t_3}t_4)\ldots \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

と定義した. ここで, k^ν は k の ν 回の繰り返しを表す. また, 彼は, その写像が全射であり, 連続であることを示した.

いかなる有限の 3 進数も, 後ろに無限に続く 2 を持った 3 進数

$$0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_nt = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_n(t-1)\overline{2}, \quad t = 1 \text{ または } 2$$

として書くことができるので, f_p の値がこの表現によらないことを確かめなければならない. 当面, $n = 2m$ を仮定し, (3.1.1) 式から f_p の第 1 要素 φ_p に対して, $\tau = t_2 + \cdots + t_{2m}$ と記述を省略することによって,

$$\begin{aligned} &\varphi_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2m}t) = 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\ldots(k^\tau t)(\overline{k^\tau 0}) \\ &= \begin{cases} 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\ldots t, & \tau \text{が偶数のとき} \\ 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)\ldots(k^{t_2\cdots+t_{2m-2}}t_{2m-1})(3-t), & \tau \text{が奇数のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} &\varphi_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2m}(t-1)\overline{2}) \\ &\quad = 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)\ldots(k^\tau(t-1))(k^{\tau+2}2)(k^{\tau+4}2)\ldots \\ &\quad = \begin{cases} 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\ldots(t-1)\overline{2} \\ \qquad = 0.t_1(k^{t_2}t_3)\ldots t, \quad \tau \text{が偶数のとき} \\ 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\ldots(2-(t-1)) \\ \qquad = 0_{\dot{3}}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\ldots(3-t), \quad \tau \text{が奇数のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

を得る. $n = 2m+1$ の場合と f_p の第 2 要素 ψ_p を求めることは読者に残

しておく．いずれにしても f_p に対して同じ結果を得ることの説明を続ける．

(3.1.1) 式により定義された写像 f_p は全射である：

$$(0_{\dot{3}}\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots,0_{\dot{3}}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots)\in\mathcal{Q}$$

としよう．このとき，

$$f_p(t)=\begin{pmatrix}0_{\dot{3}}\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots\\0_{\dot{3}}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots\end{pmatrix}$$

となるような $t=0_{\dot{3}}t_1t_2t_3t_4\ldots\in\mathcal{I}$ が存在することを示さなければならない．対応する 3 進数の位置を比較することにより，$t_0=0$ と共に，

$$\beta_n=k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}t_{2n-1},\quad \gamma_n=k^{t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}}t_{2n}$$

を得る．$k\circ k(t_j)=2-(2-t_j)=t_j$，すなわち，$k$ がそれ自身の逆 (inverse) であることに注意すれば，

$$t_{2n-1}=k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}\beta_n,\quad t_{2n}=k^{t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}}\gamma_n$$

を以上のことから得る．それは，$t_1,t_2,t_3,\ldots$ に関して連続的に解くことができる．

(3.1.1) 式により定義された写像 f_p は連続である： 次の証明は，我々が出会ったペアノ曲線の連続性の「最も確かな」証明である．これは，スペインのバレンシア工科大学からフェデリコ・プラット・ヴィラールが送ってきたものである．

φ_p が，すべての $t\in[0,1)$ に対して右から連続であることをまず示そう．

$$t_0=0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2n}t_{2n+1}\ldots$$

を，無限に続く 2 を持たないような t_0 の表現とし，また，

$$\delta=1/3^{2n}-0_{\dot{3}}000\ldots t_{2n+1}t_{2n+2}\ldots$$

としよう．

$$\begin{aligned}t_0+\delta &= 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2n}t_{2n+1}\cdots+1/3^{2n}-0_{\dot{3}}000\ldots0t_{2n+1}t_{2n+2}\ldots\\ &= 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2n}\bar{2}\end{aligned}$$

であるので，任意の $t \in [t_0, t_0+\delta)$ は，3進点 (ternary point)[1] 後の最初の $2n$ 個の数字において t_0 と一致しなければならない．すなわち，

$$t = 0_{\dot{3}} t_1 t_2 t_3 \ldots t_{2n} \tau_{2n+1} \tau_{2n+2} \cdots .$$

である．

$\epsilon = t_2 + t_4 + t_6 + \cdots + t_{2n}$ として，$n \to \infty$ のとき，

$$\begin{aligned}
&|\varphi_p(t) - \varphi_p(t_0)| \\
&= |0_{\dot{3}} t_1 (k^{t_2} t_3) \ldots (k^{\epsilon} \tau_{2n+1}) \ldots - 0_{\dot{3}} t_1 (k^{t_2} t_3) \ldots (k^{\epsilon} t_{2n+1}) \ldots| \\
&\leq |k^{\epsilon} \tau_{2n+1} - k^{\epsilon} t_{2n+1}|/3^{n+1} \\
&\qquad + |k^{\epsilon + \tau_{2n+2}} \tau_{2n+3} - k^{\epsilon + t_{2n+2}} t_{2n+3}|/3^{n+2} + \cdots \\
&\leq (2/3^{n+1})(1 + 1/3 + 1/9 + \cdots) = 1/3^n \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

となる．φ_p が (0,1] において左から連続であることを示すため，有限でない t_0 の3進表現をとらえ，$\delta = 0_{\dot{3}} 000 \ldots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \ldots$ としよう．したがって，$t_0 - \delta = 0_{\dot{3}} t_1 t_2 t_3 \ldots t_{2n}$ であり，前述のように $(t_0 - \delta, t_0]$ にある t に対して，その3進表現が，3進点後の最初の $2n$ 個の数字で t_0 の3進表現と一致しなければならないことがわかる．前と同様に手続きを進める．φ_p が $[0,1)$ において右から連続であり，また，$(0,1]$ において左から連続であるので，$[0,1]$ において連続である．ψ_p の連続性は，$\psi_p(t) = 3\varphi_p(t/3)$ からわかる． □

次に結果をまとめてみよう．

定理 (3.1) (3.1.1) 式で定義された $f_p : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ は空間充填曲線を表す．それは**ペアノ曲線** (Peano curve) と呼ばれる．

ヒルベルトの幾何原理によるこの曲線の生成方法は，3.3節において述べる．

---
[1] ［訳註］小数点と同じ．

§3.2 ペアノ曲線のいたるところ微分不可能性

ペアノ (Peano [1]) が，ある数の 3 進表現について詳細な説明が必要だとわかったことは，注目すべきことである．たった一文，すなわち，彼の論文の最後の文で，この曲線の微分可能性に疑問を投げかけた．それは，'Ces x et y — それらを φ_p と ψ_p にしよう — fonctions continues de la variable t, manquent toujours de dérivée'（「変数 t の連続関数である x と y は，すべて微分性にかける」）である．ムーアが Moore[1] において，ペアノ曲線のいたるところ微分不可能性の証明を発表したのは，10 年が経ってからであった．ペアノ自身がこの曲線のいたるところ微分不可能性を確信したかはわからないが，彼の証明は，ここで紹介する Sagan[3] にあるものより，決して簡単なものではなかった．

定理 (3.2) (3.1.1) 式によって定義されるペアノ曲線は，いたるところ微分不可能である．

証明 任意の $t = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2n}t_{2n+1}t_{2n+2}\ldots \in [0,1]$ に対して，$t_n = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots t_{2n}\tau_{2n+1}t_{2n+2}\ldots$ を定義する．ここで，$\tau_{2n+1} = t_{2n+1}+1 \pmod 2$ である．それから，$|t-t_n| = 1/3^{2n+1}$ である．(3.1.1) 式によって，$\varphi_p(t)$ と $\varphi_p(t_n)$ は $(n+1)$ 番目の 3 進数の点で単に異なる．そして，

$$|\varphi_p(t)-\varphi_p(t_n)| = |k^{t_2+\cdots+t_{2n}}t_{2n+1} - k^{t_2+\cdots+t_{2n}}\tau_{2n+1}|/3^{n+1} = 1/3^{n+1}$$

となり，それゆえ，

$$|\varphi_p(t)-\varphi_p(t_n)|/|t-t_n| = 3^n \longrightarrow \infty$$

となる．ψ_p のいたるところ微分不可能性は，$\psi_p(t) = 3\varphi_p(t/3)$ からわかる． □

§3.3 ペアノ曲線の幾何的生成

Peano[1] において，幾何的解釈がわかるようなヒントはどこにもないが，

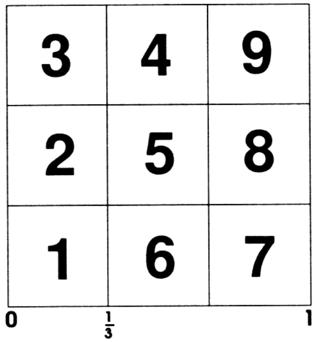


図 3.3.1　ペアノの写像

ヒルベルトは，疑いなく次の考察によって生成原理を導いた．(3.1.1) 式によって，

$$f_p(0_{\dot{3}}00t_3t_4t_5\ldots) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}0\xi_2\xi_3\xi_4\ldots \\ 0_{\dot{3}}0\eta_2\eta_3\eta_4\ldots \end{pmatrix}$$

は，区間 $[0, \frac{1}{9}]$ が図 3.3.1 の部分正方形 no.1 に写像されることを意味する．同様に，

$$f_p(0_{\dot{3}}01t_3t_4t_5\ldots) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}0\xi'_2\xi'_3\xi'_4\ldots \\ 0_{\dot{3}}1\eta'_2\eta'_3\eta'_4\ldots \end{pmatrix}$$

となり，区間 $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ が図 3.3.1 における部分正方形 no.2 に写像されることがわかる．この方法を続けて，区間 $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$ （ただし，$j = 1, 2, 3, \ldots, 9$）が図 3.3.1 において部分正方形 no.j に写像されることがわかる．

このことは，$\mathcal{I}$ を 3^{2n} 個の合同部分区間に分割し，最初の 3 ステップを図 3.3.2 に示した順に，3^{2n} (ただし,$n = 1, 2, 3, \ldots$) 個の部分正方形に写像するならば，ペアノ曲線が得られることを示している．

空間充填曲線の生成に関する条件は，隣接区間が辺を共有した隣接正方形に写像され，各写像が前の写像を保存することである．したがって，2.1 節における写像と同様に $g_p : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ が定義でき，そこで行ったように，その写像が全射でかつ連続である，すなわち，空間充填曲線を表すことを示すこと

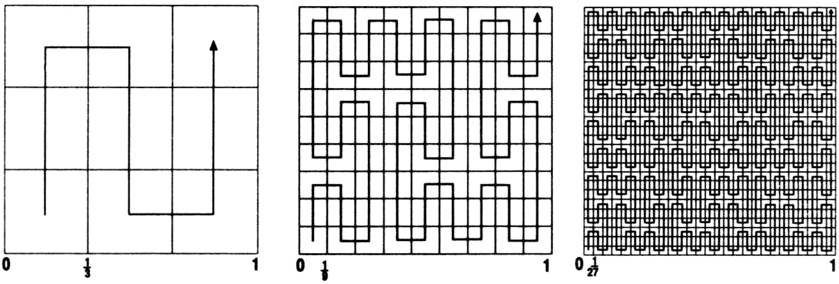


図 3.3.2　ペアノ曲線の幾何的生成

ができる．作り方の観点から，それはペアノ曲線を表し，ムーアはまさにそれを表したのではないかとも思える（Moore[1] を参照）．さしあたって，これを**幾何的** (geometric) ペアノ曲線と呼ぼう．ムーアの証明は，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{Q}$ が各ステップで $(2m+1)^2$ 個のレプリカ（複製）に切り取られるという，より一般的な場合を示した．ムーアの複雑な再帰式を避けるため，2.3 節と 2.4 節での手法を使って代数的に g_p を表し，それが (3.1.1) 式で定義されるような f_p に等しいことを示す．

§3.4　ペアノ曲線と幾何的ペアノ曲線が同じであることの証明

前節の幾何的生成過程によって得られた空間充填曲線 $g_{p*}(\mathcal{I})$ は，(0,0) から発生し，対角の (1,1) で終わることがわかる．1 つの部分正方形からの出口点 (exit point) が次の部分正方形の入口点 (entry point) と一致するように部分正方形は方向づけられる．図 3.4.1 にこのことを示している．太い矢印は入口点から出口点への方向を示す．2.3 節で示したように，必要な変換の代数的表現を得るために，ここでも複素表現を使う．部分正方形 no.1, 3, 7, 9 は，$\mathcal{Q}$ を 3 : 1 比で原点方向に一様に縮小し，必要量だけ縮小した部分正方形を移動することによって，すなわち，

$$\mathfrak{P}_0 z = \frac{1}{3}z,\ \mathfrak{P}_2 z = \frac{1}{3}z + \frac{2i}{3},\ \mathfrak{P}_6 z = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3},\ \mathfrak{P}_8 z = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$$

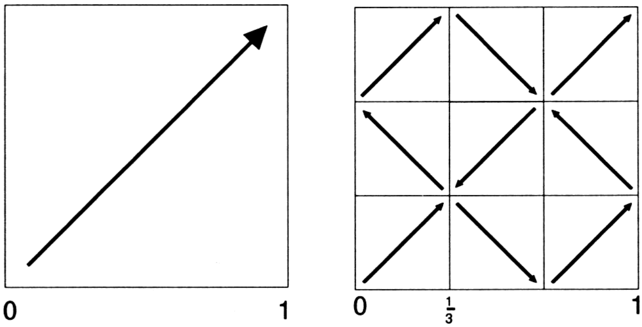


図 3.4.1　正方形の写像

によって，Q から得られる．部分正方形 no.2 を得るためには，縮小，虚軸での反転，移動を行わなければならない．すなわち，

$$\mathfrak{P}_1 z = -\frac{1}{3}\overline{z} + \frac{1}{3} + \frac{i}{3}.$$

部分正方形 no.4 を得るためには，縮小，実軸での反転，移動を行わなければならない．すなわち，

$$\mathfrak{P}_3 z = \frac{1}{3}\overline{z} + i + \frac{1}{3}.$$

また，縮小，180° 回転，移動によって，部分正方形 no.5 を得る．

$$\mathfrak{P}_4 z = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}.$$

部分正方形 no. 6 と no. 8 は，部分正方形 no. 4 と no. 2 の場合の移動を除いたそれぞれの操作から求められる．すなわち，

$$\mathfrak{P}_5 z = \frac{1}{3}\overline{z} + \frac{1}{3} + \frac{i}{3}, \quad \mathfrak{P}_7 = -\frac{1}{3}\overline{z} + 1 + \frac{i}{3}.$$

(2.3 節と同様に，t が部分正方形番号よりむしろ **9 進数**形で表現されているので，変換の添字が t における最初の数字と一致しうるように変換を列挙した.）これらの変換の実部と虚部への分解は，次のような相似変換を与える．

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_0 x + \frac{1}{3}p_0\\
\mathfrak{P}_1\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_1 x + \frac{1}{3}p_1\\
\mathfrak{P}_2\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_2 x + \frac{1}{3}p_2\\
\mathfrak{P}_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_3 x + \frac{1}{3}p_3\\
\mathfrak{P}_4\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_4 x + \frac{1}{3}p_4 \qquad (3.4.1)\\
\mathfrak{P}_5\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_5 x + \frac{1}{3}p_5\\
\mathfrak{P}_6\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_6 x + \frac{1}{3}p_6\\
\mathfrak{P}_7\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_7 x + \frac{1}{3}p_7\\
\mathfrak{P}_8\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{3}P_8 x + \frac{1}{3}p_8.
\end{aligned}
$$

($K(\mathbb{E}^2)$ を $\mathbb{E}^2$ のすべての空でないコンパクト部分集合の空間とすると，変換 $\mathfrak{P}_* : K(\mathbb{E}^2) \to K(\mathbb{E}^2)$ は，$\mathfrak{P}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=0}^{8} \mathfrak{P}_{i*}(\mathcal{A})$（ただし，$\mathcal{A} \in K(\mathbb{E}^2)$）によって定義され，9.3 節において述べるような唯一の「不動点」$\mathcal{Q}$ を持つ.）これらの変換を使って，次のことを示そう.

定理 (3.4) 3.1 節のペアノ曲線と 3.3 節の幾何的ペアノ曲線は同一である. すなわち，すべての $t \in [0,1]$ に対して，$g_p(t) = f_p(t)$ となる.

証明 $\mathcal{D} = \{0_3 t_1 t_2 t_3 \ldots t_{2n} | t_j = 0, 1,$ または，$2,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ が $\mathcal{I}$ 上で稠密であるようなすべての $t \in \mathcal{D}$ に対して，$g_p(t) = f_p(t)$ を示し，次に，すべての $t \in I$ に対して，$f_p(t) = g_p(t)$ となることを示そう.

$$0_{\dot 3}t_1t_2\ldots t_{2n-1}t_{2n}\ldots = 0_{\dot 9}(3t_1+t_2)(3t_3+t_4)\ldots(3t_{2n-1}+t_{2n})\ldots$$

に注意して，2.3 節と同様に，

$$g_p(t) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{P}_{3t_1+t_2}\mathfrak{P}_{3t_3+t_4}\cdots\mathfrak{P}_{3t_{2n-1}+t_{2n}}\mathcal{Q}$$

を得る．特に，

$$g_p(0_{\dot 3}t_1t_2\ldots t_{2n-1}t_{2n}) = \mathfrak{P}_{3t_1+t_2}\mathfrak{P}_{3t_3+t_4}\cdots\mathfrak{P}_{3t_{2n-1}+t_{2n}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad (3.4.2)$$

である．n に関する帰納法によって，すべての n に対して，

$$f_p(0_{\dot 3}t_1t_2\ldots t_{2n-1}t_{2n}) = g_p(0_{\dot 3}t_1t_2\ldots t_{2n-1}t_{2n}) \qquad (3.4.3)$$

であることを示そう．

(3.4.3) 式が $n=1$ に対して真であることを示すため，$3t_1+t_2=0,1,2,3,\ldots,8$ の 9 通りのすべての可能性を調べる必要がある．ここでは，2 通りを調べ，残りは，読者のために残しておく．

まず，$t=0_{\dot 3}00$ の場合，(3.4.2) 式から

$$g_p(0_{\dot 3}00) = \mathfrak{P}_0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となり，(3.1.1) 式から

$$f_p(0_{\dot 3}00) = \begin{pmatrix}0_{\dot 3}0(k^00)(k^00)\ldots\\0_{\dot 3}(k^00)(k^00)\ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となる．次に，$t=0_{\dot 3}12$ の場合，$3t_1+t_2=5$ に注意して，

$$g_p(0_{\dot 3}12) = \mathfrak{P}_5\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

を得る．また，

$$f_p(0_{\dot 3}12) = \begin{pmatrix}0_{\dot 3}1(k^00)(k^20)\ldots\\0_{\dot 3}(k^12)(k^10)(k^10)\ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0_{\dot 3}1\\0_{\dot 3}0\overline{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

である．他の 7 通りの場合は同様にできる．

帰納法の仮定を

$$f_p(0_{\dot{3}}t_3t_4t_5\dots t_{2n}) = g_p(0_{\dot{3}}t_3t_4t_5\dots t_{2n}) \tag{3.4.4}$$

とする．まず，

$$f_p(0_{\dot{3}}t_3t_4t_5\dots t_{2n}) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_{\dot{3}}\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix} \tag{3.4.5}$$

としよう．ここで，

$$\xi_2 = t_3, \xi_3 = k^{t_4}t_5, \xi_4 = k^{t_4+t_6}t_7, \dots$$

と

$$\eta_2 = k^{t_3}t_4,\quad \eta_3 = k^{t_3+t_5}t_6,\quad \eta_4 = k^{t_3+t_5+t_7}t_8,\ \dots$$

である．(3.4.5) 式が与えられているとき，(3.4.3) 式が真であることを示そう．再び，$3t_1 + t_2$ に対する 9 通りすべての場合を調べる必要がある．その中で 2 通りを取り上げ，残りは読者に残しておく．

まず，$t = 0_{\dot{3}}02$，すなわち，$3t_1 + t_2 = 2$ としよう．(3.4.4) 式と (3.4.5) 式によって，

$$g_p(0_{\dot{3}}02t_3t_4\dots t_{2n}) = \mathfrak{P}_2\begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_{\dot{3}}\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}0\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_{\dot{3}}0\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{\dot{3}}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}0\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_{\dot{3}}2\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix}$$

となり，また，

$$f_p(0_{\dot{3}}02t_3t_4\dots t_{2n}) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}0(k^2t_3)(k^{2+t_4}t_5)\dots \\ 0_{\dot{3}}(k^02)(k^{0+t_3}t_4)\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}0\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_{\dot{3}}2\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix}$$

を得る．次に，$3t_1 + t_2 = 7$ において $t = 0_{\dot{3}}21$ を調べてみよう．すなわち，

$$g_p(0_{\dot{3}}21t_3t_4t_5\dots t_{2n}) = \mathfrak{P}_7\begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_{\dot{3}}\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0_{\dot{3}}0\xi_2\xi_3\xi_4\ldots \\ 0_{\dot{3}}0\eta_2\eta_3\eta_4\ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}\overline{2} - 0_{\dot{3}}0\xi_2\xi_3\xi_4\ldots \\ 0_{\dot{3}}1\eta_2\eta_3\eta_4\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}2(2-\xi_2)(2-\xi_3)(2-\xi_4)\ldots \\ 0_{\dot{3}}1\eta_2\eta_3\eta_4\ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}2(k\xi_2)(k\xi_3)(k\xi_4)\ldots \\ 0_{\dot{3}}1\eta_2\eta_3\eta_4\ldots \end{pmatrix}$$

である．一方，

$$f_p(0_{\dot{3}}21t_3t_4t_5\ldots t_{2n}) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}2(k^1t_3)(k^{1+t_4}t_5)\ldots \\ 0_{\dot{3}}(k^21)(k^{2+t_3}t_4)\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\dot{3}}2(k\xi_2)(k\xi_3)\ldots \\ 0_{\dot{3}}1\eta_2\eta_3\eta_4\ldots \end{pmatrix}$$

となる．

残りの 7 通りの場合は読者に残しておき，証明として (3.4.3) 式を考えよう．直線分で，(0,0) に交わった始点と (1,1) に交わった終点を持つ図 3.3.2 の多角線は，$\mathcal{I}$ 上の g_p に一様収束する連続曲線となる．よって，g_p は $\mathcal{I}$ 上で連続である．f_p が $\mathcal{I}$ 上で連続であることはすでにわかっているので，すべての $t \in \mathcal{D}$ に対して，

$$h(t) = f_p(t) - g_p(t) = 0$$

となる．$t \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{D}$ としよう．$t_k \in \mathcal{D}$ での点列 $\{t_k\} \to t$ が存在し，h の連続性によって，$h(t) = \lim_{k\to\infty} h(t_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$，すなわち，すべての $t \in \mathcal{I}$ に対して，$f_p(t) = g_p(t)$ となる．　□

相似変換 (3.4.1) 式を使って，2.4 節と同様に，f_p の解析的・代数的表現を得る．9 個の P_j のうちの 4 つが恒等行列となるので除き，残り 5 個のうち 3 つだけが異なっており，その式は，(2.4.3) 式のように簡単でなく，ペアノの表現 (3.1.1) 式のようにエレガントでもない．したがって，ほとんど興味がない．しかし，確かに (3.1.1) 式は，計算機によって簡単に評価しやすい．付録 A.1.2 には BASIC でのプログラムを載せた．

§3.5 ペアノ曲線のチェザロ表現

チェザロは，(3.1.1) 式において定義されるペアノ曲線の解析的・代数的表現

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1}(t)/3^n, \quad \psi(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(t)/3^n \tag{3.5.1}$$

を与えた．ここで，

$$f_m(t)=1+([3^m t]-3[3^{m-1}t]-1)(-1)^{[3t]+[3^2 t]+\cdots+[3^{m-1}t]} \tag{3.5.1a}$$

である (Cesàro[1])．チェザロは，$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ へ写像しているが，ペアノは，$\mathcal{Q}=[0,1]^2$ へ写像している．この式 (3.5.1a) は，これによって生じる不一致を調整するため，チェザロの式と 1 だけ異なる．$f_1(t)$ が (3.5.1a) 式によって定義されていないが，チェザロが

$$f_1(t)=1+([3t]-3[t]-1)(-1)^{[t]} \tag{3.5.1b}$$

を意味していたことは確かである．

ムーア（Moore[1], p.73 脚註 †）は，この式が $t=1$ のときに正しくないことに気づいた．実際 $t=1$ を (3.5.1) 式に代入すると，$\varphi(1)=1$ と $\psi(1)=0$ となり，両方 1 とならない．この曲線を扱っているシェルピンスキーは，$t=1$ の場合を完全に無視している (Sierpiński[2], pp.202–203)．明らかに，この問題は，完全に見過ごされてしまったのである．

ペアノの定義 (3.1.1) 式においていくつかの式変形をし，チェザロ表現 (3.5.1) 式にいくつかの変形をするならば，チェザロの式の問題は解消できるであろう．

まず，定義 (3.1.1) 式を

$$\begin{aligned}\varphi_p(t_{0\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots)&=0_{\dot{3}}(k^{t_0}t_1)(k^{t_0+t_2}t_3)(k^{t_0+t_2+t_4}t_5)\ldots\\ \psi_p(t_{0\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots)&=t_{0\dot{3}}(k^{t_1}t_2)(k^{t_1+t_3}t_4)(k^{t_1+t_3+t_5}t_6)\ldots\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

に置き換えよう．もし $t_{0\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots\in[0,1)$ であれば，$t_0=0$ となり，(3.5.2) 式は，(3.1.1) 式と同じになる．もし $t_{0\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots=1$ であれば，$t_0=1$ となり，また，すべての $j\geq 1$ に対して $t_j=0$ となるので，$\varphi_p(1)=0_{\dot{3}}(k0)(k0)(k0)\ldots=0.\overline{2}=1$，$\psi_p(1)=1_{\dot{3}}(k^0 0)(k^0 0)(k^0 0)\ldots=1$ となる．

次に，チェザロの表現を

$$\varphi_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1}(t)/3^n, \quad \psi_p(t) = [t] + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(t)/3^n \tag{3.5.3}$$

に変えよう．ここで，

$$f_m(t) = 1 + ([3^m t] - 3[3^{m-1}t] - 1)(-1)^{[t]+[3t]+[3^2 t]+\cdots+[3^{m-1}t]} \tag{3.5.3a}$$

である．((3.5.3) 式の ψ_p の表現に $[t]$ を加え，また，(3.5.3a) 式の (-1) の指数部分にも $[t]$ を加えている．) (3.5.3) 式と (3.5.3a) 式を検証するため，$t = 0_{\dot{3}} t_1 t_2 \ldots t_n \ldots \in [0,1)$ であり，2 が無限に続くあらゆる 3 進数が，有限の 3 進数に置き換えられることを考えると，

$$\begin{aligned} 3^n t &= t_1 t_2 \ldots t_{n\dot{3}} t_{n+1} t_{n+2} \ldots, [3^n t] = (t_1 \ldots t_n)_3 \\ [3^{n-1}t] &= (t_1 \ldots t_{n-1})_3, 3[3^{n-1}t] = (t_1 \ldots t_{n-1}0)_3 \end{aligned}$$

となり，したがって，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$[3^n t] - 3[3^{n-1}t] = t_n \tag{3.5.4}$$

となることを示そう．$t = 1$ ならば，すべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $t_n = 0$ となり，$[3^n] - 3[3^{n-1}] = 0$ である．したがって，(3.5.4) 式は，すべての $t \in [0,1]$ とすべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して成り立つ．$t < 1$ ならば，$t_0 = 0$ であり，$[t] - 3[t/3] = 0$ となる．$t = 1$ ならば，$t_0 = 1$ と $[1] - 3[1/3] = 1$ となる．(3.5.4) 式がすべての $t \in [0,1]$ と $n = 0$ に対して有効となることがわかる．よって，(3.5.4) 式はすべての $t \in [0,1]$ とすべての $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ に対して成り立つ．3.1 節において定義された演算子 k に関して，$kt_j = 2 - t_j$ であり，k の ν 回の繰り返しを k^ν とすると，

$$k^\nu t_j = 1 + (-1)^\nu (t_j - 1) \tag{3.5.5}$$

となる．写像 (3.5.2) 式のもとで像点の座標を $(0_{\dot{3}} b_1 b_3 b_5 \ldots, c_{0\dot{3}} c_2 c_4 c_6 \ldots)$ とすると，(3.5.2) 式と (3.5.5) 式から $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned} b_{2n-1} &= k^{t_0+t_2+\cdots+t_{2n-2}}(t_{2n-1}-1) \\ c_0 &= t_0 \\ c_{2n} &= k^{t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}}t_{2n} = 1+(-1)^{t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}}(t_{2n}-1) \end{aligned}$$

を得る．(3.5.4) 式から

$$t_{2n-1}-1 = [3^{2n-1}t]-3[3^{2n-2}t]-1$$

と

$$t_m = [3^m t]+3[3^{m-1}t](\mathrm{mod}\ 2)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} b_{2n-1} &= 1+([3^{2n-1}t]-3[3^{2n-2}t]-1) \\ &\quad \times(-1)^{[t]+[3^2t]+3[3t]+[3^4t]+3[3^3t]+\cdots+[3^{2n-2}t]+3[3^{2n-3}t]} \\ &= 1+([3^{2n-1}t]-3[3^{2n-2}t]-1)(-1)^{[t]+[3t]+[3^2t]+\cdots+[3^{2n-2}t]} \end{aligned}$$

となる．同様に，$n=1,2,3,\ldots$ に対して，

$$c_{2n} = 1+([3^{2n}t]-3[3^{2n-1}t]-1)(-1)^{[t]+[3t]+[3^2t]+\cdots+[3^{2n-1}t]}$$

を得る．

最後に，

$$c_0 = [t]$$

である．$b_{2n-1}=f_{2n-1}(t)$ と $c_{2n}=f_{2n}(t)$ によって，ここで得たチェザロ表現 (3.5.3) 式と (3.5.3a) 式は証明されたことがわかる．$t=1$ に対して正しい結果が得られる式は，次のようになる．(3.5.3a) 式から，

$$\begin{aligned} f_m(1) &= 1+([3^m]-3[3^{m-1}]-1)(-1)^{1+3+9+\cdots+3^{m-1}} \\ &= 1-(-1)^{(3^m-1)/2} = \begin{cases} 0, & m \text{ が偶数} \\ 2, & m \text{ が奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

である．$t=1$ より $[t]=1$ となり，したがって，

$$\varphi_p(1) = \sum_{j=1}^{\infty} 2/3^j = 0.\overline{2} = 1, \quad \psi_p(1) = 1+\sum_{j=1}^{\infty} 0/3^j = 1$$

を得る．

§3.6　ペアノ曲線に対する近似多角形

定義2.6のように，ノード，すなわち像点 $f_p(0)$，$f_p(1/3^{2n})$，$f_p(2/3^{2n})$，$\ldots$，$f_p((3^{2n-1})/3^{2n})$，$f_p(1)$ をつなぐ多角形を**ペアノ曲線の n 次近似多角形**と呼ぶ．式の定義は，(2.6.1) 式から 2^{2n} を 3^{2n} に置き換え，また，f_h を f_p に置き換えることにより得られる．2次近似多角形が，図3.6.1に示される．この図は，多角形がその進行を見えにくくするようにそれ自身に衝突したり，また，それが直感的，魅力的な何かのきっかけにならないので，あまり意味がない．これを避ける方法として，角をまるめることにより，図3.6.2のような1次と2次の近似多角形を得る．

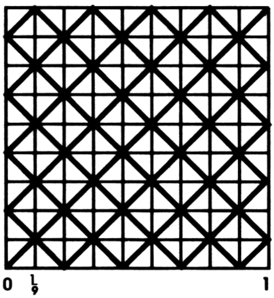


図 3.6.1　ペアノ曲線に対する2次近似多角形

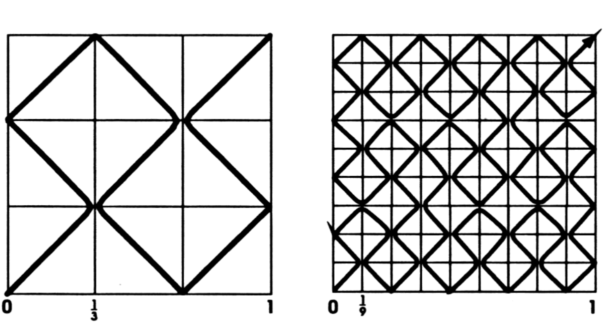


図 3.6.2　角の丸めを持ったペアノ曲線に対する1次と2次近似多角形

2.6 節のように，これらの多角形はペアノ曲線に一様収束する（連続曲線の）列をなすことがわかる．これは，ペアノ曲線の連続性に関する代わりの証明を提供する．(付録 A.2.4 も参照.）近似多角形は，ライトモティフとして (0,0) から (1,1) への対角線への変換 (3.4.1) 式を適用することにより生成できる．

§3.7 ペアノ曲線のヴンダーリヒ版



ヴァルター・ヴンダーリヒ (1910–) はオーストリアのウィーンで生まれた．ウィーン大学に通い，フルトヴェングラー，マイヤホーファ，ヴィルティンガーのもとで，数学を学んだ．また，ウィーン工科大学ではエックハルト，クラメス，クルッパのもとで，幾何を学んだ．1934 年に，ウィーン工科大学より博士号を取得した．また，1946 年には教職についた．206 の論文や本を広めたなどの彼の多くの貢献は，2 つの範疇に主に分けられる．1 つは，ユークリッド空間と非ユークリッド空間の古典微分幾何学であり，もう 1 つは，図形幾何学や運動学や測地学を含む応用幾何学である．彼は，広く利用されている 2 巻本の図形幾何学の本と運動学の本の著者でもある．1970 年には，ワシントン州立大学において運動学の客員教授を務めた．1947 年から 1977 年まで *International Mathematical News* の編集委員を努め，数学会のために尽力した．1957 年から 1959 年までは，ウィーン工科大学の自然科学学部の学部長であった．さらに，1964 年から 1965 年まで，この大学の学長を努めた．1954 年から，いたるところ微分不可能な曲線，特にヒルベルト型の空間充填曲線の生成に対して，相似変換（反復関数系）の利用を熱望した．(より詳しくは，Stachel[1] を参照.）

W. ヴンダーリヒは，空間充填曲線の生成において我々の条件を満たす部分正方形の他の 3 つの並べ方を与えている (Wunderlich[3]).

図 3.7.1，3.7.2，3.7.3 において，これらの曲線の生成の 2 番目と 3 番目のステップを描いた．ヴンダーリヒは，図 3.7.1，3.7.2 の生成過程によって得られる空間充填曲線を**スイッチバック型のペアノ曲線** (Peano curve of the switch-back type(Serpentinentyp)) と呼んでいる．図 3.7.3 の生成過程から得られる曲線を**ミーンダー型のペアノ曲線** (Peano curve of the meander type) と呼んでいる．なお，3.1 節のもともとのペアノ曲線が，スイッチバック型であることに注意されたい．スイッチバック型の多角形の作り方において，再帰的な繰り返しが 2 つの異なった方法に各ステップで定義できるから，9 桁の 2 進数によって，生成過程は特徴づけられる．そのような列が $2^9 = 512$ 通りある．それらの中で，$2^5 = 32$ は，その列の中央の要素に関して対称である．なぜならば，中央の要素を選ぶのに 2 通りの方法がある．それの前の 4 つの要素を選ぶのに 2^4 通りある．残りの $512 - 32 = 480$ 通りの非対称な列の中で，半分だけが異なる作り方に導かれる．なぜならば，そのような列の逆が正方形の中心で $180°$ の回転になる．よって，スイッチバック型のペアノ曲線は，$240 + 32 = 272$ 通りある．ミーンダー型には，2 つのペアノ曲線だけがある．なぜならば，始まりに 2 つの異なる方向があるが，そのとき，可能な繰り返しの 1 モードだけしかない．しかしながら，その 2 つが正方形の主対角線に関してお互いに対称である．ミーンダー型の曲線は $(0,0)$ から始まり，$(1,1)$ でなく，$(1,0)$ で終了する．(その対称な像は，$(0,1)$ で終

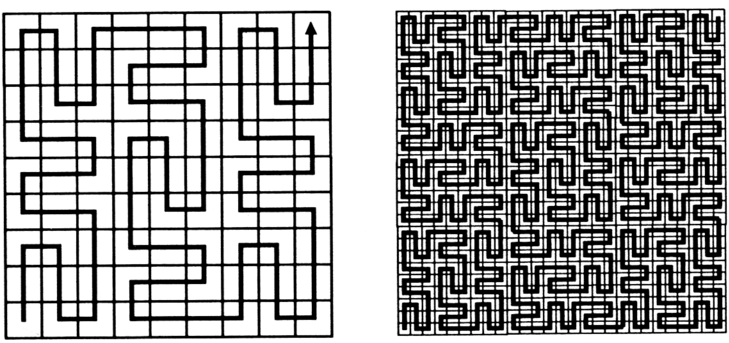


図 3.7.1　スイッチバック型のペアノ曲線の生成

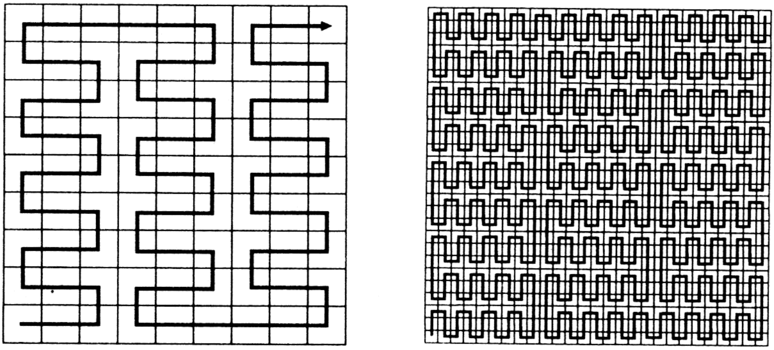


図 3.7.2　スイッチバック型のペアノ曲線の生成

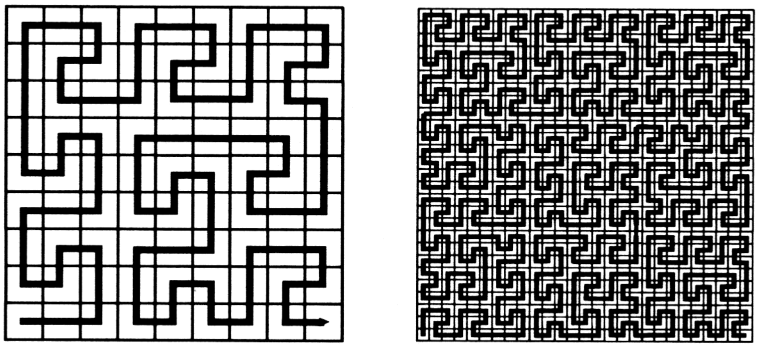


図 3.7.3　ミーンダー型のペアノ曲線の生成

わる.)

§3.8　3 次元ペアノ曲線

ペアノは，写像 $f_p : \mathcal{I} \to \mathcal{W}$ の軸 φ_p, ψ_p, χ_p を

$$\varphi_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots) = 0_{\dot{3}}\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$$
$$\psi_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots) = 0_{\dot{3}}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$$
$$\chi_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\ldots) = 0_{\dot{3}}\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$$

と定義している．ここで，

$$\begin{array}{lll} \beta_1 = t_1, & \beta_2 = k^{\gamma_1+\delta_1}t_4, & \beta_3 = k^{\gamma_1+\gamma_2+\delta_1+\delta_2}t_7 \\ \gamma_1 = k^{\beta_1}t_2, & \gamma_2 = k^{\beta_1+\beta_2+\delta_1}t_5, & \gamma_3 = k^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\delta_1+\delta_2}t_8 \\ \delta_1 = k^{\beta_1+\gamma_1}t_3, & \delta_2 = k^{\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2}t_6, & \delta_3 = k^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}t_9 \end{array}$$

であり，一般に，

$$\begin{aligned} \beta_n &= k^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{n-1}+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}}t_{3n-2} \\ \gamma_n &= k^{\beta_1+\cdots+\beta_n+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}}t_{3n-1} \\ \delta_n &= k^{\beta_1+\cdots+\beta_n+\gamma_1+\cdots+\gamma_n}t_{3n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

となる．また，$kt_j = 2 - t_j$ である (Peano[1])．この写像が全射であることを示すため，$t_1, t_2, t_3, \ldots$ に対する上述の（定義した）式を解かなければならない．k がそれ自身逆であるから，

$$\begin{aligned} t_{3n-2} &= k^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{n-1}+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}}\beta_n \\ t_{3n-1} &= k^{\beta_1+\cdots+\beta_n+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}}\gamma_n \\ t_{3n} &= k^{\beta_1+\cdots+\beta_n+\gamma_1+\cdots+\gamma_1+\cdots+\gamma_n}\delta_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

を得る．連続性は，2 次元ペアノ曲線の 3.1 節と同じように進めることができるが，読者に残しておく．また，この曲線がいたるところ微分不可能であることの証明と，幾何的生成手続きの定式化も読者に残しておく．4 次元以上のペアノ曲線は，6.9 節において説明しよう．

§3.9 問題

1. (3.1.1) 式から $f_p(0_{\dot{3}}00001), f_p(0_{\dot{3}}33333), f_p(0_{\dot{3}}310221), f_p(0_{\dot{3}}310\overline{2})$ を求めなさい．

2. ((3.1.1) 式において定義されているように) f_p の第 1 軸 φ_p が $t = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\dots t_{2n-1}t_{2n}$ または $t = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\dots t_{2n-1}(t_{2n}-1)\overline{2}$ にかかわらず，同じ値をとることを示しなさい．

3. ((3.1.1) 式において定義されているように) f_p の第 2 軸 ψ_p が $t = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\dots t_nt_{n+1}$ または $t = 0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\dots t_n(t_{n+1}-1)\overline{2}$ にかかわらず，同じ値をとることを示しなさい．

4. (3.1.1) 式が区間 $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$（ただし，$j = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$）を図 3.1 の正方形 3,4,5,6,7,8,9 に写像することを示しなさい．

5. $(t_1, t_2) = (0, 1)$，$(0, 2)$，$(1, 0)$，$(1, 1)$，$(2, 0)$，$(2, 1)$，$(2, 2)$ に対して，$f_p(0_{\dot{3}}t_1t_2) = g_p(0_{\dot{3}}t_1t_2)$ であることを示しなさい．

6. (3.4.4) 式が与えられているとして，$(t_1, t_2) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)$ に対して，$f_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\dots t_{2n}) = g_p(0_{\dot{3}}t_1t_2t_3\dots t_{2n})$ となることを示しなさい．

7. チェザロ表現 (3.5.3) 式を使って，$f_p(\frac{1}{3})$ と $f_p(\frac{7}{9})$ を求めなさい．

8. もともとのペアノ曲線と図 3.7.1，図 3.7.2 の曲線以外にスイッチバック型のペアノ曲線を作りなさい．

9. 3.7 節の 3 次元ペアノ曲線の幾何的生成過程を示しなさい．

10. $f : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ を $f(0_{\dot{b}}\beta_1\beta_2\beta_3\dots) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{b}}\beta_1\beta_3\beta_5\dots \\ 0_{\dot{b}}\beta_2\beta_4\beta_6\dots \end{pmatrix}$ によって定義されるとしよう．f が全射であるが，連続でないことを示しなさい．

11. 3.8 節の 3 次元ペアノ曲線が連続であることを示しなさい．

12. 3.8 節の 3 次元ペアノ曲線がいたるところ微分不可能であることを示しなさい．

13. 図 3.7.1，3.7.2，3.7.3 のペアノ型の曲線を生成する相似変換を求めなさい．

14. $\int_0^1 \varphi_p(t)dt$ と $\int_0^1 \psi_p(t)dt$ を求めなさい．

15. $(\xi, \eta) \in \mathcal{Q}$ としよう．以下のことを示しなさい．
    (a) ξ と η が唯一の 3 進表現を持つならば，$\varphi_p(t) = \xi, \psi_p(t) = \eta$ であるような唯一の $t \in [0, 1]$ が存在する．
    (b) ξ が有限の 3 進表現であり，η が唯一の（無限）3 進表現であるならば，あるいはその逆であるならば，$\varphi_p(t_i) = \xi$，$\psi_p(t_i) = \eta$（ただ

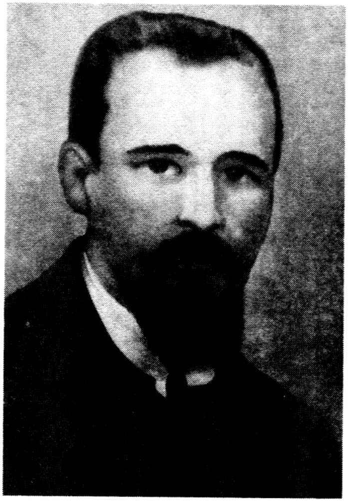
し, $i = 1, 2$) となるような2つの異なった値 $t_1, t_2 \in [0, 1]$ が存在する.

(c) ξ と η が有限の3進表現であるならば, $\varphi_p(t_i) = \xi, \psi_p(t_i) = \eta$ (ただし, $i = 1, 2, 3, 4$) となるような4つの異なった値 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, 1]$ が存在する.

16. ペアノの写像 $f_p : [0, 1] \to \mathcal{Q}$ のもとで, [0,1] に少なくとも2つの前像を持つような $\mathcal{Q}$ 内の点集合は, 連続のカージナル数 $\mathbf{c}$ を持つことを示しなさい.

第 4 章　シェルピンスキーの空間充填曲線

§4.1　シェルピンスキーの最初の定義



ワツラフ・シェルピンスキー (1882–1969) は，ポーランドのワルシャワに生まれ，そこで歿した．1899 年に，彼は（ロシアの）ワルシャワ大学に入学し，1904 年に理学の学士を受け卒業した．彼は，中等学校 (grammar school) において教え続け，1905 年の革命に関連した大規模な学校のストライキに参加した．それから，クラクフに移り，1906 年には，クラクフ大学において博士号を取得した．中等学校において教えた後，1908 年には，リボフ大学の講師になり，1910 年には，教授となった．そのとき，研究の対象を整数論から位相幾何学へと変えた．その後，1950 年まで整数論にもどることはなかった．人生後半の 20 年間の研究発表は，整数論がほとんどであった．彼は，約 700 編にもおよぶ論文や本を出版した最も多作な数学者の 1 人であった．そのうち 600 編は，位相幾何学に関するものであった．1914 年には，帝政ロシアによって拘禁された．モスクワにおいて，エゴロフやルジンによって助けられ，彼とルジンとの間には，長い間協力関係が続いた．1918 年には，リボフにもどり，生まれ変わったポーランドのワルシャワ大学で教授となった．そのとき，マズルキーウィッチやジャニスゼウスキーと共に，基礎，集合論，応用を目指した新しい数学のポーランド学派 (Polish School of Mathematics) を設立した．また，彼は，雑誌 *Fundamenta Mathematicae* を作った．彼は，1920 年のインフルエンザによるジャニスゼウスキーの死後，マズ

ルキーウィッチと共にその編集を任され，数十年にわたり力を注いだ．彼は，雑誌 *Acta Arithmetica* の編集長になり，この雑誌の刊行を再開させた．占領中，高等教育のすべての機関が閉鎖されたとき，彼のアパートで人目を忍び危険を伴いながら教え続けた．戦争後，彼は，ポーランド科学アカデミーの数学機関を組織するのに尽力し，人生の晩年まで常任幹部会の一員であった．生涯において，多くの名誉が与えられた．没後，記念として，ポーランド科学アカデミーの数学機関の大講堂や，ポーランド数学会で設けられている賞には，彼の名がつけられている．ワルシャワにある通りや月のクレータにも彼の名前がつけられている．墓石には，(彼の要望として) 碑文 'Badacz Nieskończoności' (「無限の発明者」) が記されている．詳しくは，Kuratowski([2], [3]) を参照．

1912 年，W. シェルピンスキーは，さらに他の空間充填曲線を紹介した (Sierpiński[1])．彼は，すべての実数 t に対して

$$f(t) + f(t + 1/2) = 0$$

を満たし，すべての $t \in [0, 1]$ に対して

$$2f(t/4) + f(t + 1/8) = 1$$

を満たすような実変数 t の有界かつ連続な偶関数 f が存在し，そして，

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t - 1/4) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le t \le 1 \tag{4.1.1}$$

が正方形 $[-1, 1]^2$ のすべての点を通ることを示した．この関数 f がすべての必要とされる性質を持つことの大変面倒な証明の間に，彼は次の表現

$$f(t) = \frac{\Theta(t)}{2} - \frac{\Theta(t)\Theta(\tau_1(t))}{4} + \frac{\Theta(t)\Theta(\tau_1(t))\Theta(\tau_2(t))}{8} - \cdots \tag{4.1.1a}$$

を見つけた．ここで，1 周期関数 Θ, τ_k は，次のように定義される．

$$\Theta(t) = \begin{cases} -1, & t \in [1/4, 3/4) \text{ のとき} \\ 1, & t \in [0, 1/4) \quad \text{または} \quad t \in [3/4, 1) \text{ のとき} \end{cases}$$

と

$$\tau_1(t) = \begin{cases} 1/8 + 4t, & t \in [0, 1/4) \quad \text{または} \quad t \in [1/2, 3/4) \text{ のとき} \\ 1/8 - 4t, & t \in [1/4, 1/2) \quad \text{または} \quad t \in [3/4, 1) \text{ のとき} \end{cases}$$

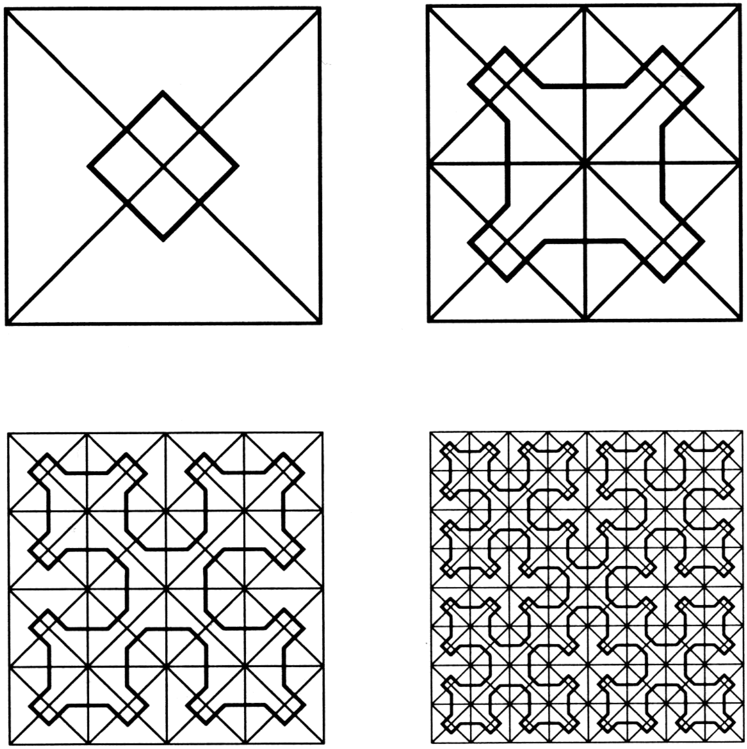


図 4.1　シェルピンスキー曲線に対する近似多角形

$$\tau_{k+1}(t) = \tau_k(\tau_1(t)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

彼は，この曲線が多角形の一様収束列の極限であり，その最初の 4 つが図 4.1 により表されることを示している．G. ポーヤは，シェルピンスキー曲線の半分が，正方形 $[-1, 1]^2$ を対角線で半分に切ることによって得られる 2 つの直角二等辺三角形の一方にあり，もう半分がもう一方の三角形にあることを，1913 年の論文 (Pólya[1], p.1, 脚註 3) において指摘した．したがって，シェルピンスキー曲線は，$\mathcal{I}$ から直角二等辺三角形への写像ととらえることができる．また，ヒルベルトの幾何的生成手続きの応用によって得られるも

のを，次節の最初において述べる．このことから，シェルピンスキーのもともとの曲線よりも簡単な 2 つの解析的・代数的表現を導く．

§4.2　シェルピンスキー曲線の幾何的生成とクノップの表現

ヒルベルトの幾何的生成原理を利用して，写像 $f_s : \mathcal{I} \to \mathcal{T}$ を定義しよう．ここで，$\mathcal{T}$ は $(0,0)$，$(2,0)$，$(1,1)$ を頂点とする直角二等辺三角形を表す．$\mathcal{I}$ を 2^n 個の合同部分区間に分割し，$\mathcal{T}$ を 2^n 個の合同部分三角形 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ に分割する．図 4.2.1 に最初の 8 ステップを示す．ここで，太線の多角線は，隣接部分区間が辺をはさんで隣接三角形に写像され，各写像が前の写像を保存するという必要性を満たすための，部分三角形の配置すべき順番を示している．（図 4.1 におけるシェルピンスキーの近似多角形が，図 4.2.1 において，図 4.2.1(a), (c), (e), (g),... から斜辺に関する鏡像と $45°$ 回転を使って，合わせることにより得られることに注意.）空間充填曲線を得るために，2.1 節や 3.3 節のように写像 f_s を定義しよう．連続性は 2.1 節と同様に確かめられる．$\mathcal{I}$ 上の 2 点がお互いに $1/2^n$ 単位以内であれば，最悪の場合でも n 回の分割の 2 つの隣接区間内にあり，また，その像も最悪 2 つの隣接部分三角形内にある．

部分三角形が $n \to \infty$ のとき，点に収縮するので，その曲線は，$(0,0)$ から始まり，$(2,0)$ まででで終わる．各部分三角形からの出口と次の部分三角形の入口が一致しなければならないという必要性は，各部分三角形の方向によって推測できる．図 4.2.2 には，最初の三角形と最初の 2 回の繰り返しに対する例を太矢印によって示した．

n 次分割（2^n 個の部分三角形への分割）の部分三角形は，$(n-1)$ 次分割を行って，$\vec{\mathcal{T}}_1^1$ へと $\vec{\mathcal{T}}_2^1$ への 2 つの相似変換 $\mathfrak{K}_o$ と $\mathfrak{K}_1$ を用いた写像 $\vec{\mathcal{T}}$ から得られることが図 4.2.2 よりわかる．

$\vec{\mathcal{T}}$ から $\vec{\mathcal{T}}_1^1$ を得るために，再び複素表現を使って，虚軸に対する $\vec{\mathcal{T}}$ の反射 $z' = -\bar{z}$，原点のまわりの $-135°$ 回転 $z'' = e^{-3\pi\, i/4} z'$，原点方向への比率 $\sqrt{2} : 1$ の縮小 $z''' = (1/\sqrt{2}) z''$ を行うと，

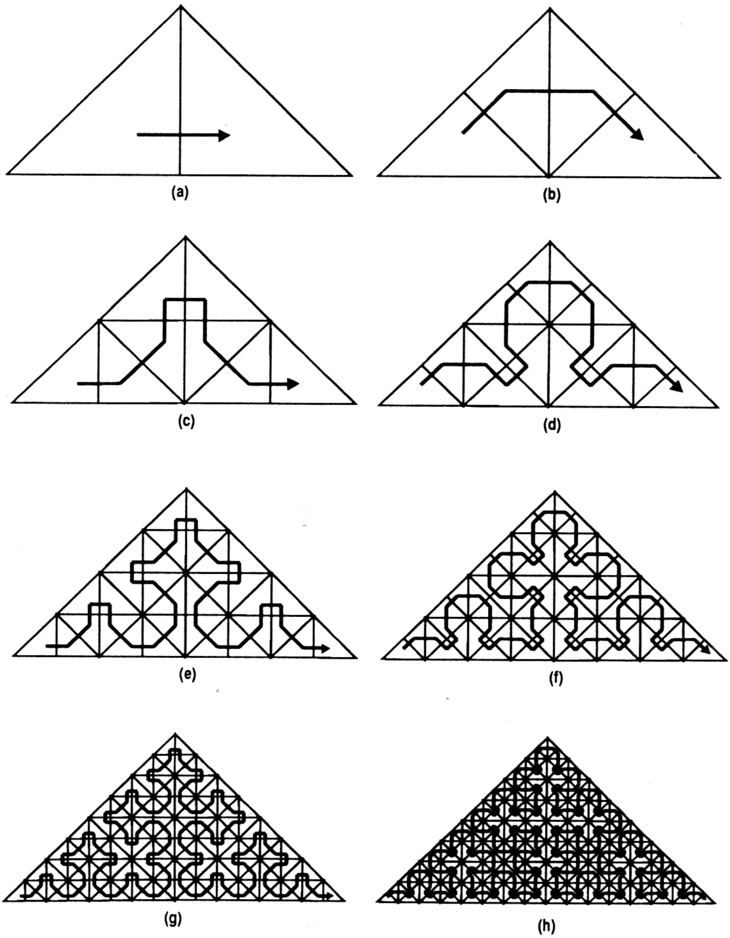


図 4.2.1 シェルピンスキー曲線の生成

$$\mathfrak{K}_o z = -(1/\sqrt{2})e^{-3\pi i/4}\overline{z} \triangleq \frac{1}{2}K_0 z + \frac{1}{2}k_o \tag{4.2.1}$$

を得る．ここで，$k_0 = 0 + i0$ である．$\vec{\mathcal{T}}$ から $\vec{\mathcal{T}}_2^1$ を得るために，実軸に対する $\vec{\mathcal{T}}$ の反射 $z' = \overline{z}$，原点のまわりの $-45°$ 回転 $z'' = e^{-\pi i/4}z'$，原点方向への比率 $\sqrt{2} : 1$ の縮小 $z''' = (1/\sqrt{2})z''$，そして，右に 1 単位，上に 1 単

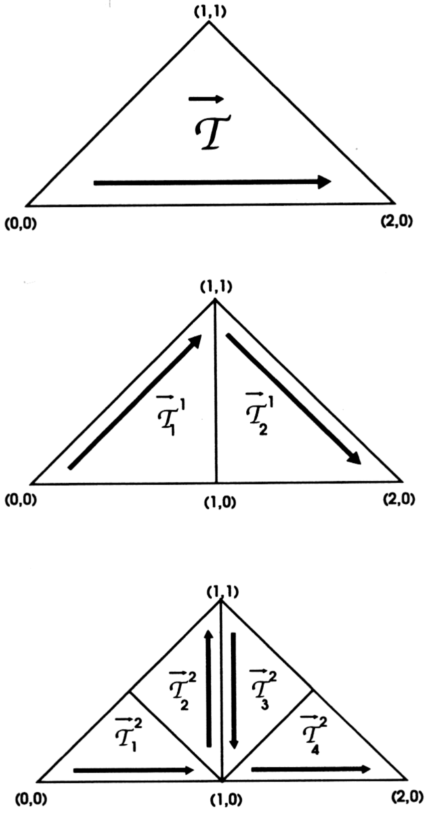


図 4.2.2　$\vec{\mathcal{T}}$ のその合同部分への写像

位移動すると，

$$\mathfrak{K}_1 z = (1/\sqrt{2})e^{-\pi i/4}\overline{z} + \sqrt{2}e^{\pi i/4} \triangleq \frac{1}{2}K_1 z + \frac{1}{2}k_1 \tag{4.2.2}$$

を得る．2.3 節，3.4 節と同様にして，

$$f_s(0_{\dot{2}}b_1 b_2 b_3 \ldots) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \lim_{n\to\infty} \mathfrak{K}_{b_1}\mathfrak{K}_{b_2}\mathfrak{K}_{b_3}\ldots\mathfrak{K}_{b_n}\mathcal{T}$$

となり，特に，

$$f_s(0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\dots b_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} \mathfrak{K}_{b_1}\mathfrak{K}_{b_2}\mathfrak{K}_{b_3}\dots\mathfrak{K}_{b_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$f_s(0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\dots b_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} K_{b_0}K_{b_1}K_{b_2}\dots K_{b_{j-1}}k_{b_j}$$

を得る．ここで，$K_{b_0} = 1$ である．また，f_s の連続性により，

$$f_s(0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\dots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \begin{pmatrix} \mathcal{R}e \\ \mathcal{I}m \end{pmatrix} K_{b_0}K_{b_1}K_{b_2}\dots K_{b_{j-1}}k_{b_j} \tag{4.2.3}$$

を得る．ここで，

$$K_{b_j}z = \sqrt{2}e^{(-1)^{b_j}\,i\pi/4}\bar{z},\ k_o = 0,\ k_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\,\pi/4}$$

である．$k_o = 0$ より，(4.2.3) 式の総和内のそれらの項だけが，$b_j = 1$ であることを表している．(4.2.3) 式の総和内の j 番目の項を形成するのに，$(j-1)$ 回の k_{b_j} の複素共役，$(j-2)$ 回の $K_{b_{j-1}}k_{b_j}$ の複素共役，…，そして，1 回の $K_{b_2}K_{b_3}\dots K_{b_{j-1}}k_j$ の複素共役をとらなければならない．その結果，

$$\frac{1}{2^j}K_{b_0}K_{b_1}K_{b_2}\dots K_{b_{j-1}}k_{b_j} = \frac{(\sqrt{2})^j}{2^{j-1}} \exp\Big\{[(-1)^{b_1} - (-1)^{b_2} + (-1)^{b_3} - \dots + (-1)^{j-2}(-1)^{b_{j-1}} + (-1)^{j-1}]\frac{i\pi}{4}\Big\}$$

を得る．したがって，

$$\varphi_s(0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\dots) + i\psi_s(0.b_1b_2b_3\dots)$$
$$= \sqrt{2}b_1e^{i\pi/4} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{b_j}{(\sqrt{2})^{j-2}} \tag{4.2.4}$$
$$\times e^{[(-1)^{b_1}-(-1)^{b_2}+(-1)^{b_3}-\dots+(-1)^{j-2}(-1)^{b_{j-1}}+(-1)^{j-1}]\frac{i\pi}{4}}$$

となる．この式は，フォン・コッホ，オズグッド，ペアノによる曲線の生成と表現に関する論文（ここで，クノップはペアノ曲線という言葉を空間充填曲線の一般的な意味に使っており，ペアノの特定の例を示していない —— Knopp[1]）におけるより一般的な式の特別な場合として，1917年K. クノップによって求められた．フォン・コッホ曲線は，いたるところ微分不可能であり（Koch[1] —— 本書8.3節と9.1節も参照），オズグッド曲線は，正のルベーグ測度を持った，いたるところ微分不可能なジョルダン曲線であり（詳しくは，本書第8章でそのような曲線について述べる），クノップのペアノ曲線は，クノップ曲線として知られている，本節のシェルピンスキー曲線である．したがって，ここでは，シェルピンスキー–クノップ曲線として参照する．(4.2.4) 式は，クノップの式（Knopp[1], p.113 の半ば）とは異なる．細かくみると，まず，クノップは，ここで述べたような長さ2の底辺でなくむしろ長さ1の底辺の三角形を使っている．これは，(4.2.4) 式において余分な要素2が必要となる．次に，クノップの式の e の指数部の最後の項は —— 示された代入がなされたら ——，(4.2.4) 式のように $+(-1)^{j-1}$ よりむしろ $-(-1)^{j-1}(-1)^{b_j}$ となる（Sagan[6] も参照）．しかし，これは $b_j = 1$ を持った項だけが (4.2.4) 式に示されているので，同じである．

(4.2.4) 式は，(4.1.1) 式と (4.1.1a) 式より簡単であり，取り扱いやすいものである．次節では，同時に繰り返しを2ステップとり，2.4節と同様な議論を進めることにより，簡単な表現を得る．

コンラート・クノップ (1881–1957) は，ベルリンに生まれ，フランスのアヌシーに歿した．1901年にはローザンヌ大学に入学したが，1学期後にベルリンにもどり，研究を完成させた．彼は，E. ランダウ教授の指導のもとで論文を仕上げ，1907年にベルリン大学より博士号を取得した．そこで，彼は，ヘルダーの「極限」を持つ発散数列がチェザロの「極限」を持つことを示した．(後に，W. シュニーは，2つの概念の等価性を示すことにより，その収束が真であることを示した.）1908年にはアメリカ合衆国経由で日本に渡った．そして，長崎のビジネス・スクールで教えた．それから中国やインドを旅した．1910年ドイツにもどるまでに，28歳で世界1周航海を成し遂げたのである．中国に行ったときは，青島の独中大学で短期間教えた．1911年にはベルリン大学にもどり，無給大学講師の地位を得た．彼は，陸軍アカデミー (Military Academy) や戦争大学 (War College) においても非常勤で教えた．1914年，第1次世界大戦へ予備士官として徴兵された．同年に負傷し，勲章を受け



て，彼は教育にもどった．1915 年にはケーニヒスベルク大学に教えに行き，1926 年には，テュービンゲン大学に移り，1950 年の退職までそこにとどまった．クノップは，博士論文の初めの部分の極限過程の研究に多くの時間を割いた．彼は，数列のほとんどすべての要素を含む閉凸集合の積として，「複素数の数列の核」の概念を導入した．核の「サイズ」は，発散の強さに対する尺度となる．(核が点に収束すれば，その数列は収束する．) 彼は，またオイラーの総和法を徹底的に研究した．現在，この方法は，オイラー–クノップ過程として参照されている．複素変数の関数論の教科書（当初 1918 年に 2 巻本として出版され，その後 5 巻本に拡張され，英語に翻訳された）は，国内外の多くの世代の数学を志す学生に広く知られている．『無限級数の理論と応用 (*Theory and Applications of Infinite Series*)』は，古典である．L. リヒテンシュタインと I. シューアと共に，1918 年に雑誌 *Mathematische Zeitschrift* を刊行し，1957 年まで編集委員であった．(1934 年から 1952 年まで編集委員長を努めた.) 1934 年から 35 年まで雑誌 *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* の編集委員であった．1945 年から 46 年にかけてはテュービンゲンの大学で数理科学学部の学部長となった．さらに，1945 年には，ドイツ数学会の会長となった．ドイツ数学会の年報 (Jahresbericht d. DMV) の死亡記事において，E. カムケと K. ツラーは，彼の人生を次のようにまとめた．'Es war ein reich mit Werten und Leistung erfülltes Leben'（「彼の人生は，高い評価と業績に富んだものであった」)．(より詳しくは，Freudenthal[2] と kamke and Zeller[1] を参照.)

§4.3 4 進数によるシェルピンスキー–クノップ曲線の表現

Sagan[6] において，生成過程で 1 つおきのステップをとばすことにより，また，直接 $\vec{T}$ から図 4.2.1(b) の配列へ，次に，図 4.2.1(b) から図 4.2.1(d) の配列へ，などなどと進めることにより，シェルピンスキー–クノップ曲線の

より簡単な表現を得た．言い換えると，$\mathcal{I}$ を $4, 16, 64, \ldots$ 個の部分区間に分割し，それに従って，$\vec{\mathcal{T}}$ を同様に切る．$\vec{\mathcal{T}}$ から $\vec{\mathcal{T}}_j^2$（図 4.2.2 を参照）への相似変換を $\mathfrak{S}_0$，$\mathfrak{S}_1$，$\mathfrak{S}_2$，$\mathfrak{S}_3$ とすると，(4.2.1) 式と (4.2.2) 式より，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_0 z &= \mathfrak{K}_0(\mathfrak{K}_0 z) = \mathfrak{K}_0[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp(-3\pi i/4)\overline{z}] = z/2 \\
\mathfrak{S}_1 z &= \mathfrak{K}_0(\mathfrak{K}_1 z) = \mathfrak{K}_0[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\pi i/4)z + \sqrt{2}\exp(\pi i/4)] = zi/2 + 1 \\
\mathfrak{S}_2 z &= \mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}_0 z) = \mathfrak{K}_1[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp(-3\pi i/4)\overline{z}] = -zi/2 + 1 + i \\
\mathfrak{S}_3 z &= \mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}_1 z) = \mathfrak{K}_1[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\pi i/4)z + \sqrt{2}\exp(\pi i/4)] + \sqrt{2}\exp(\pi i/4) \\
&= z/2 + 1
\end{aligned}$$

を得る．実部と虚部に分割するが，記号 $\mathfrak{S}_j$ を残すと，相似変換の次式

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_0\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}S_0 x + \frac{1}{2}s_0 \\
\mathfrak{S}_1\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}S_1 x + \frac{1}{2}s_1 \\
\mathfrak{S}_2\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}S_2 x + \frac{1}{2}s_2 \\
\mathfrak{S}_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{2}S_3 x + \frac{1}{2}s_3
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

を得る．($\mathcal{T}$ が，写像 $\mathfrak{S}_* : K(\mathbb{E}^2) \to K(\mathbb{E}^2)$ の唯一の「不動点」を持つことを，9.3 節で述べるであろう．ここで，$K(\mathbb{E}^2)$ は，$\mathbb{E}^2$ の空でないすべてのコンパクト部分集合によって張られる空間である．これは，$\mathfrak{S}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=0}^{3} \mathfrak{S}_{i*}(\mathcal{A})$（ただし,$\mathcal{A} \in K(\mathbb{E}^2)$）によって定義される.）

2.4 節と同様にすると，$S_{q_0} = I$ より，

$$f_s(0_4\dot{} q_1 q_2 q_3 \ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} S_{q_0} S_{q_1} S_{q_2} \ldots S_{q_{j-1}} s_{q_j} \tag{4.3.2}$$

を得る．$S_0 = S_3 = I$, $S_2 = -S_1$, $S_1^2 = -I$, $S_1^3 = -S_1$, $S_1^4 = I$ に注意し

て，(4.3.2) 式を

$$f_s(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}(-1)^{\eta_j} S_1^{\delta_j} s_{q_j} \tag{4.3.3}$$

と書き換えることができる．ここで，

$$\eta_j = q_j \text{ の前までの 2 の個数 (mod 2)} \tag{4.3.3a}$$

であり，

$$\delta_j = q_j \text{ の前までの 1 と 2 の個数 (mod 4)} \tag{4.3.3b}$$

である．((4.3.3) において見られる S_1 の最も高い乗数は 3 である！) t が，無限に続く 3 を持った無限 4 進数，あるいは，それに対応する有限の 4 進数によって表現されるかどうかにかかわらず，(4.3.3) 式が同じ結果になることの証明は読者に残しておく．

$q_j = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して，すべての可能性 $\delta_j = 0, 1, 2, 3$ を調べることによって，また，$q_j = 0$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を導くことに注意することによって，(4.3.3) 式が

$$f_s(0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\eta_j}}{2^j}\mathrm{sgn}(q_j)$$
$$\times \begin{pmatrix} (1-\delta_j)(1+(-1)^{\delta_j}) + \frac{1}{2}(\delta_j - 2)(1-(-1)^{\delta_j})(1+(-1)^{q_j}) \\ (2-\delta_j)(1-(-1)^{\delta_j}) + \frac{1}{2}(1-\delta_j)(1+(-1)^{\delta_j})(1+(-1)^{q_j}) \end{pmatrix} \tag{4.3.4}$$

に書き換えられることは，簡単に確かめられる．ここで，η_j, δ_j は，(4.3.3a) 式と (4.3.3b) 式と同じである．

(4.3.4) 式は，シェルピンスキーの (4.1.1a) 式とクノップの (4.2.4) 式より，簡単に数値計算しやすい．付録 A.1.3 には (4.4.3) 式の評価に対する計算機プログラムを載せた．

§4.4　シェルピンスキー–クノップ曲線のいたるところ微分不可能性

シェルピンスキー–クノップ曲線の座標関数のいたるところ微分不可能性は，2.2 節のヒルベルト曲線の座標関数のいたるところ微分不可能性と同様にすれば，幾何的洞察の助けによって確かめられるであろう．読者には，このことを確かめてもらいたい．逆に，ここでは，(4.3.4) 式の表現に基づいた解析的証明 (Sagan[7]) を示す．これは，2.5 節に示されたヒルベルト曲線の座標関数のいたるところ微分不可能の解析的証明と似たものである．

まず，(4.3.4) 式の総和の中で大きくて扱いにくいベクトルの最初の要素のために，記号の省略形を導入しよう．

$$d(\delta_j, q_j) = (1-\delta_j)(1+(-1)^{\delta_j}) + \frac{1}{2}(\delta_j - 2)(1-(-1)^{\delta_j})(1+(-1)^{q_j}).$$

$q_j = 1$ または 3 に対して，$d(\delta_j, q_j)$ の第 2 項は消え，

$$d(\delta_j, \text{奇数}) = (1-\delta_j)(1+(-1)^{\delta_j})$$

を得る．よって，

$$d(\text{奇数}, \text{奇数}) = 0,\ \ d(0, \text{奇数}) = 2,\ \ d(2, \text{奇数}) = -2 \tag{4.4.1}$$

である．次のことを示す準備ができた．

定理 (4.4)　シェルピンスキー–クノップの座標関数は —— (4.3.4) 式によって表されているように —— いたるところ微分不可能である．

証明　(f_s の最初の要素 φ_s に対する証明を示す．第 2 の要素 ψ_s に対する証明は，同様に行うことができる．) 3 つの場合に分けて考えなければならない．

(1)　無限に多くの 1 または 2（または両方）が，$t = 0_4 q_1 q_2 q_3 \ldots$ の 4 進表現内に存在する．

q_{n_1} が，1 または 2 であり，偶数個の 1 または 2 が続く 4 進点後の最初の数を表すものとし，q_{n_2} が，1 または 2 であり，偶数個の 1 または 2 が続く

4 進点後の 2 番目の数を表すものとし，などなどとしよう．また，

$$\underline{t}_{n_1} = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\dots q_{n_1-1}0, \quad \bar{t}_{n_1} = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\dots q_{n_1-1}3$$
$$\underline{t}_{n_2} = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\dots q_{n_2-1}0, \quad \bar{t}_{n_2} = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\dots q_{n_2-1}3,\ \text{などなど}$$

としよう．2 つの数列 $\{\underline{t}_{n_j}\}$ と $\{\bar{t}_{n_j}\}$ は，付録 A.2.1 の微分不可能性に関する条件の必要性を満たしている．

$$\bar{t}_{n_j} - \underline{t}_{n_j} = 3/4^{n_j}$$

と

$$\varphi_s(\bar{t}_{n_j}) - \varphi_s(\underline{t}_{n_j}) = \frac{(-1)^{\eta_{n_j}}}{2^{n_j}} d(\delta_{n_j}, 3)$$

を得る．(4.4.1) 式によって，

$$|(\varphi_s(\bar{t}_{n_j}) - \varphi_s(\underline{t}_{n_j}))/(\bar{t}_{n_j} - \underline{t}_{n_j})| = 2^{n_j+1}/3 \longrightarrow \infty$$

となり，いたるところ微分不可能になる．(付録 A.2.2 を参照.)

(2) $t = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\dots q_n\dots$ の 4 進数拡張において，有限に多くの 1 または 2 があるが，無限に多くの 3 が存在する．これは，すべての有限 4 進数 —— 0 以外 —— の場合を含んでいる．それは，無限に続く 3 を持った無限の 4 進数に変換でき，特に $t = 1 = 0_{\dot{4}}\dot{3}$ である．

すべての $j = 1, 2, 3\dots$ に対して，$q_{n+j} = 0$ または 3 となるような最小の整数を n としよう．

(a) $q_1, q_2, \dots, q_n$ の間で偶数個の 1 または 2 が存在する．n_1 が $q_{n+n_1} = 3$ となる最小の整数とし，n_2 が $q_{n+n_2} = 3$ となる第 2 最小整数とし，などなどとする．また，

$$t_{n_j} = 0_{\dot{4}}q_1q_2q_3\dots q_{n+n_j-1}0q_{n+n_j+1}\dots$$

としよう．そのとき，

$$|t - t_{n_j}| = 3/4^{n+n_j}$$

である．0 と 3 が η_j と δ_j に与える同じ影響を持っているので，すなわち，まったく影響がないので，

$$\varphi_s(t) - \varphi_s(t_{n_j}) = \frac{(-1)^{n+n_j}}{2^{n+n_j}} d(\delta_{n+1}, 3)$$

となり，したがって，$j \to \infty$ のとき，

$$|(\varphi_s(t) - \varphi_s(t_{n_j}))/(t - t_{n_j})| = 2^{n+n_j+1}/3 \longrightarrow \infty$$

を得る．

(b)　$q_1, q_2, \ldots, q_n$ の間で奇数個の1と2が存在する．$n_1, n_2, \ldots$ を(a)と同じように定め，また，$j \geq 2$ に対して，

$$t_{n_j} = 0_4 q_1 q_2 q_3 \ldots q_{n+n_j-2} 1 q_{n+n_j} \ldots$$

としよう．今，偶数個の1または2は，(0または3である）残りの数字に続く．(4.4.1)式からと，すべての η_j が $j \geq n + n_2$ と同じであるから

$$\varphi_s(t_{n_j}) = \varphi_s(t) \pm (2/2^{n+n_j} + 2/2^{n+n_{j+1}} + 2/2^{n+n_{j+2}} + \cdots)$$

を得る．

$$|t - t_{n_j}| \leq 2/4^{n+n_{j-1}}$$

より，$j \to \infty$ のとき，

$$|(\varphi_s(t) - \varphi_s(t_{n_j}))/(t - t_{n_j})| \geq 2^{n+n_{j-2}} \longrightarrow \infty$$

が得られる．

(3)　$t = 0$ のとき．$t_n = 3/4^n = 0_4 000\ldots03$ としよう．そのとき，

$$|0 - t_n| = 3/4^n$$

である．(4.3.3.a)式と(4.3.3b)式により，すべての j に対して $\eta_j = \delta_j = 0$ となり，

$$\varphi_s(0) - \varphi_s(t_n) = \frac{1}{2^n} d(0, 3)$$

を得る．したがって，$n \to \infty$ のとき，

$$|(\varphi_s(0) - \varphi_s(t_n))/(0 - t_n)| = 2^{n+1}/3 \longrightarrow \infty$$

となる．これらの3通りの場合からすべての可能性が消え，仮定が証明された．　□

§4.5　シェルピンスキー–クノップ曲線に対する近似多角形

((4.3.4) 式によって) シェルピンスキー–クノップ曲線の節を見つけるにあたって，(2.7.1) 式において f_h を f_s に換え，また，2^{2n} を 2^n に換えることにより，その曲線の近似多角形を定義しよう．特に，0 次近似多角形は，(目標三角形の斜辺である) $f_s(0)$ を $f_s(1)$ につないだ線分であり，1 次近似多角形は，$f_s(0)$，$f_s(1/2)$，$f_s(1)$ をつないだ折れ線であり，2 次近似多角形は，$f_s(0)$，$f_s(1/4)$，$f_s(1/2)$，$f_s(3/4)$，$f_s(1)$ をつなぎ，などなどである．図 4.5.1 には，6 次と 7 次の近似多角形を示す．以前の場合のように，この図は，近似多角形がそれ自身に衝突し，時々折り返したりするので，不明確になってしまっている．その上，それらは，あまり魅力的でない．(ところで，変換 (4.2.1) と (4.2.2) を繰り返し，(0,0) から (2,0) への (方向を持った) 線分に適用することによって，近似多角形を得ることができる．n 次近似多角形は，これらの変換を n 回連続して実行することにより得られる.)

近似多角形の進み方について，よりわかりやすくするために，次の操作によって得られる近似で近似多角形を置き換える．(0,0) から (2,0) への線分を，それのわずかに上に引き，目標三角形 $\mathcal{T}$ の残りの 2 辺によって切り落とす線分で置き換える．それから変換 (4.2.1) と (4.2.2) を連続して適用する．1 つおきのステップ後，2 つの離れた部分の間に残ったギャップを埋めなければならない．2 回の繰り返し後にそれ自身への衝突と進行の不明瞭なパスを避けるため，三角形の辺にふれないような弧によってギャップを埋める．図 4.5.2 には，$n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ に対する操作の過程を示した．

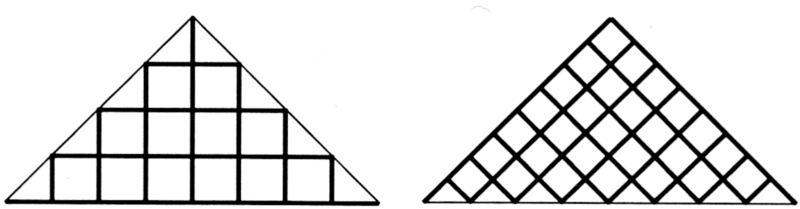


図 4.5.1　シェルピンスキー–クノップ曲線の 6 次と 7 次の近似多角形

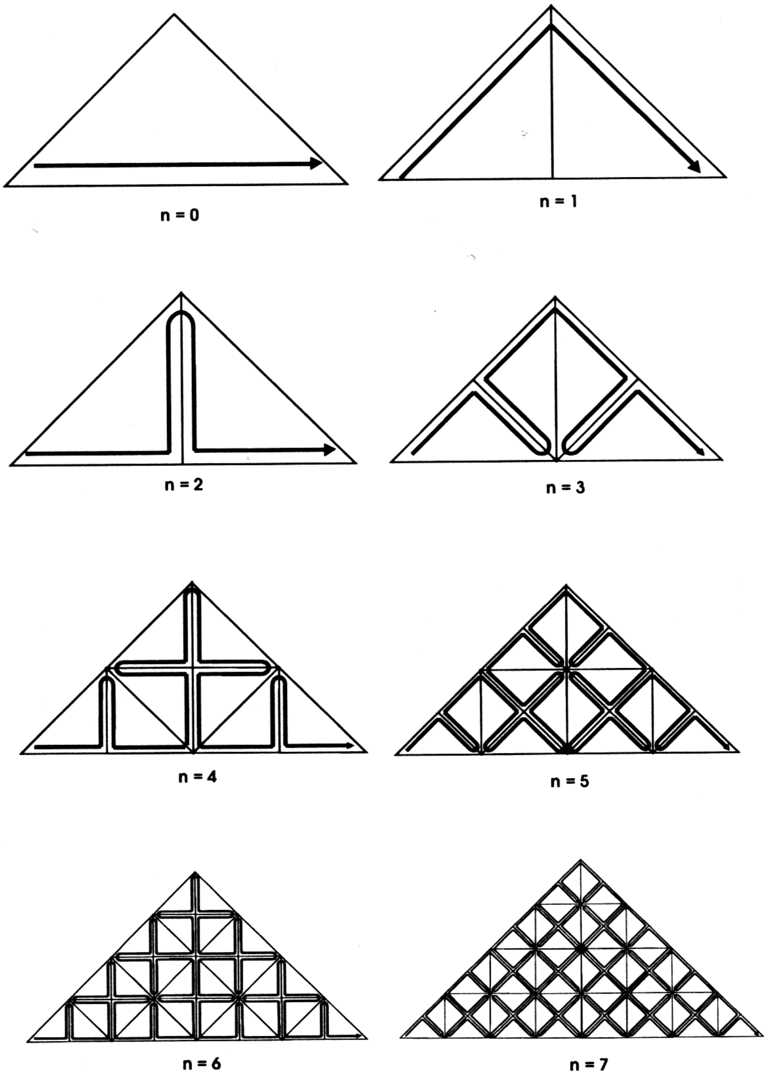
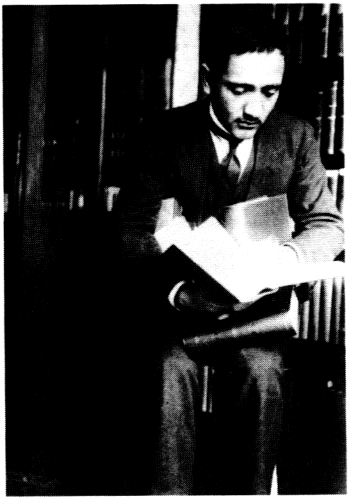


図 4.5.2　$n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ の近似多角形への近似

§4.6　シェルピンスキー曲線のポーヤによる生成



ゲオルグ・ポーヤ (1887–1985) は，ブダペストに生まれ，カリフォルニアのパロ・アルトに歿した．ブダペスト大学において法学を学び，それから言語学や文学に移り，最後にL. エトヴェシュやL. フェジェールの指導者のもとで数学や物理を学んだ．彼は，1910 年と 1911 年をウイーンで過ごし，1912 年ブダペスト大学から博士号を取得するためにブダペストに戻った．その後，2 年間をゲッティンゲン大学で過ごし，F. クライン，D. ヒルベルト，H. ワイル，R. クーラントに出会った．1914 年，パリにおいて，É. ピカール，J. アダマールに会った．同年，A. フルヴィッツの命令により，チューリヒのスイス連邦工業大学に教官として加わった．ここで，1928 年に教授職を約束され，アメリカ合衆国に移住する 1940 年まで続けた．ブラウン大学での 2 年とスミス大学校での短期滞在の後，当時スタンフォード大学で数学教室の学科主任だった G. セゲーからの招聘に応じた．彼は，1953 年に退職するまでスタンフォードで教鞭をとった．退職後の長年の数学教育への彼の貢献は，伝説的である．(98 歳で亡くなった．) 長い教授職の間，G. セゲー（古典となっている『解析学からの練習問題と命題 (*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*)』Springer-Verlag(1925) を出版した），G. ジュリア，I. シューア，M. フェケテ，A. フルヴィッツ，G. H. ハーディ，J. E. リトルウッド，N. ウィーナー，I. J. シェーンベルクや他の多くの人と共同で研究をした．彼が貢献した多くの分野の中には，複素変数の関数論，確率論，数学的手法，組合せがある．(詳しくは，Alexanderson[1] を参照.)

シェルピンスキーの論文 (Sierpiński[1]) の 1 年後，1913 年にポーヤは，シェルピンスキーの生成方法の一般化を発表した．ヒルベルト (Hilbert[1]) は，目的集合のすべての点が $\mathcal{I}$ でせいぜい 3 つの前像を持つように，空間充填曲線を構成できることを暗示しただけで，きちんと示したわけではなかった．しかし，ポーヤは初めて，それがいかにして達成できるか —— そこに彼の貢献の重要な部分がある —— を示した．

ポーヤは，$\mathcal{I}$ から，二等辺である必要のない直角三角形上へ写像している．まず，$\mathcal{I}$ を2つの合同部分区間に分割し，図4.6.1に示されるように，三角形 $\mathcal{T}$ を2つの相似であるが，合同でない部分三角形へ分割する．それから図4.6.2に示されるように分割を続ける．ここで，太い多角線は，部分三角形のたどるべき順番を示している．

2.1節で定式化したように，空間充填曲線の定義に関する条件は，明らかに満たされ，前進したのである．2つの辺の比が1に近づくとき，図4.6.2の多角線は，図4.2.1の多角線により似てくることに注意しよう．

1970年代初め，P. D. ラックスは，ニューヨーク大学での実変数の講義において，ポーヤ曲線がいたるところ微分不可能であることの証明を学生に質問した．解答を引き出すのに失敗したが，自分で試み，驚くことに次のことを見い出した．ポーヤ曲線は，図4.6.1の小さい方の角が30°と45°の間にあるならばいたるところ微分不可能であり，その角が15°と30°の間にあるならば，測度1の集合上いたるところ微分不可能であり，可付番できない集合上で微分0を持ち，その角が15°未満であるならば，測度1の集合上で微分が0である (Lax[1])．R. T. バンビィは，その後その角度が30°であるならばいたるところ微分不可能であり，その角度が15°であるならば測度1の集合上で微分可能でないことを証明した (Bumby[1])．(その角度が45°のとき，ポーヤの曲線はシェルピンスキー–クノップ曲線になり，定理4.4が適用される.)

ポーヤは次のことを示した．

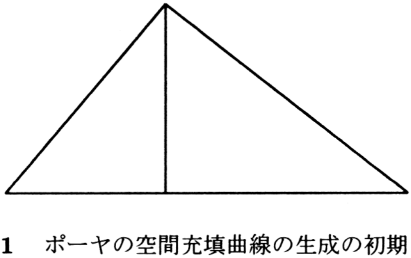


図4.6.1　ポーヤの空間充填曲線の生成の初期ステップ

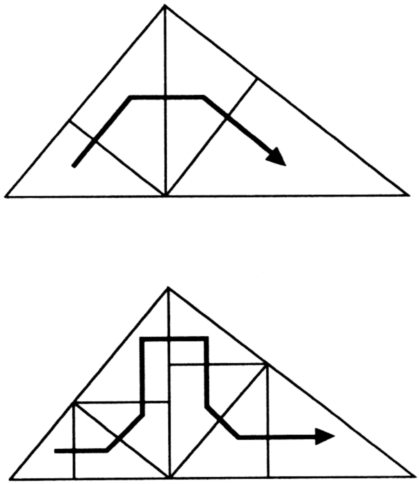


図 4.6.2 ポーヤの空間充填曲線の生成

定理 (4.6)（ポーヤ） 短い方の辺と斜辺との比を（それは，いずれにしても $1/\sqrt{2}$ 以下である）超越数 (transcendental number) に選ぶと，$\mathcal{T}$ 内の任意の点がせいぜい $\mathcal{I}$ 内で 3 つの前像を持つ．

証明 $\mathcal{T}$ 内のあらゆる点は，少なくとも 1 つの部分三角形に含まれており，せいぜい 8 個の部分三角形に含まれている．P が三角形を分割する任意の線分上にないならば，あるいはそれが斜辺の両端の 2 頂点の 1 つであるならば，正確に部分三角形に属し，ただ 1 つの前像を持つ．どの繰り返しにおいても，存在している分割の直角部分は，2 つの角，すなわち，45° 以下の角度（**鋭角**）と残りの角（**鈍角**）に分割される．それゆえ，節点で発生（あるいは終了）する線分が 8 を越えるはずがない．これは点が 8 を越える部分三角形に属することがないことを意味する．1 点がいくつの部分三角形に属しようとも，その数は分割が細分されるときに減ることがない．なぜならば，各分割は前の分割を含んでいるからである．$\nu(P)$ を点 P が属する部分三角形の数としよう．

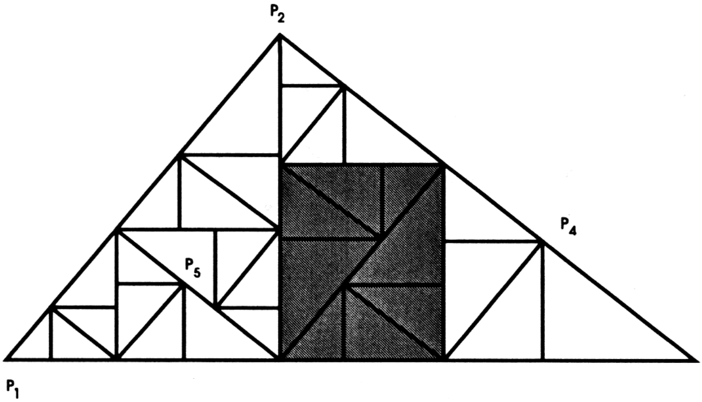


図 4.6.3　$\mathcal{T}$ の 32 個の部分三角形への分割

$\nu(P)=1$ ならば，P は単純な点である．すなわち，$\mathcal{I}$ 内に唯一の前像を持つ．（図 4.6.3 の点 P_1 はそのような点である）．

$\nu(P)=2$ または 4 ならば，P は，以下のどちらかである．1 つは，直角の頂点にあり，1 つだけの前像を持つ．なぜなら，P（図 4.6.3 における P_2）は，左の三角形からの出口点であり，右の三角形への入口点である（部分三角形での鈍角での頂点は入口点であり，鋭角の頂点は出口点である）．よって，1 つだけの前像を持ち，すなわち，$t=\frac{1}{2}$ である．もう 1 つは，P が 2 つの三角形の境界にあり，頂点にない．後者の場合では，2 つの前像を持つ．$\nu(P)=2$ を持つようなすべての他の点は，まさに次の分割で，$\nu(P)=4$ を持った点に変えられる．(図 4.6.3 も参照.) $\nu(P)=4$ のとき，最初の三角形の出口点は，1 つの前像を生じる次の三角形の入口点と一致する．同様に，3 番目の三角形の出口点は，もう 1 つの前像を生じる 4 番目の入口点と一致する．

$\nu(P)=3$ は次の分割で $\nu(P)=5$ に変えられる．

$\nu(P)=5$ ならば，(図 4.6.3 の点 P_5 のように）P は $\mathcal{I}$ 内に 3 つの前像を持つ．それは 5 つの三角形に属する．そのうちの 1 つは，残りと完全に離れており，1 つの前像を生じている．残りの 4 つは，前の場合と同様に同じ位置にあり，加えて 2 つの前像を示す．

$\nu(P)=6$ または 7 は不可能である．

$\nu(P)=8$ ならば，P は 4 つの前像を持つ．この場合，P は 2 つの部分三

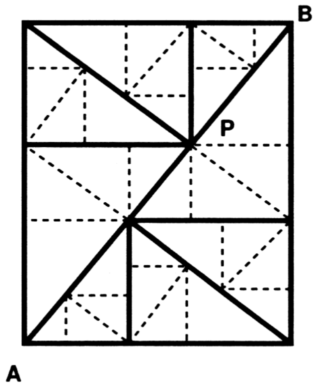


図 4.6.4 $\nu(P) = 8$ の点

角形から形成される長方形の対角をなす線分上に存在する．(また，図 4.6.4 も参照せよ．それは，2 つのさらなる分割後の，図 4.6.3 の灰色の長方形を示す.）対角のいずれかの辺上に P で頂点の 1 つを持った 4 つの三角形が存在する．これは一辺につき 2 つの前像を持つ．短い方の辺と斜辺との比を超越数に選ぶと，これが起こりえないことを示す.

（斜辺が長さ l を持つと仮定すると）図 4.6.5 や初等三角法からわかるように，始点 0 から P_1 までの距離は,

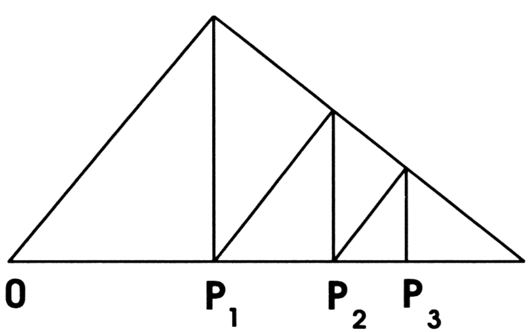


図 4.6.5 斜辺に沿った節の構成

$$\rho(0, P_1) = lr^2$$

で与えられ，0 から P_2 までの距離は，

$$\rho(0, P_2) = lr^2 + l(1 - r^2)r^2$$

で与えられ，0 から P_3 までの距離は，

$$\rho(0, P_3) = lr^2 + lr^2(1 - r^2) + lr^2(1 - r^2)^2$$

で与えられ，などなどである．これらのすべての距離は，整数係数を持ち，絶対項を持たない r の多項式で，l の積として表現されることがわかる．よって，$\nu(P) = 8$ であれば，上部の三角形を参照して（図 4.6.4 における）A から P までの距離を計測することにより，

$$\rho(A, P) = l\ pol_1(r)$$

を得る．ここで，$pol_1(r)$ は整数係数を持ち，絶対項を持たない r の多項式としよう．B からの距離（下部の三角形を参照して）を計測すると，

$$\rho(B, P) = l\ pol_2(r)$$

を得る．ここで，$pol_2(r)$ はある（他の）そのような多項式を表す．よって，

$$l\ pol_1(r) + l\ pol_2(r) = l$$

とならなければならない．ゆえに，r は代数的数 (algebraic number) でなければならない．r が超越数であれば，$\nu(P) = 8$ は起こらず，ここでの前提は証明された．□

これは，最良の証明である．ハーンとマズルキーウィッチは，連続である $f_*(\mathcal{I}), f : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ が $\mathcal{I}$ 内でせいぜい 2 つの前像を持つならば，空間を充填するはずがないことを示した (Hahn[1], Mazurkiewicz[4])．f が空間充填曲線で表されるならば，$\mathcal{I}$ 内で少なくとも 3 つの前像を持つ $\mathcal{Q}$ 内の点がいたるところ稠密であることを示してきた．ハーンは，$\mathcal{I}$ 内の少なくとも 2 つの前像を持った点集合がカージナル数 $\mathfrak{c}$ を持つことを示した．（注意：ヒルベルトとペアノの曲線は 4 倍の点を持つ．すなわち，4 つの前像を持つ点.）ポー

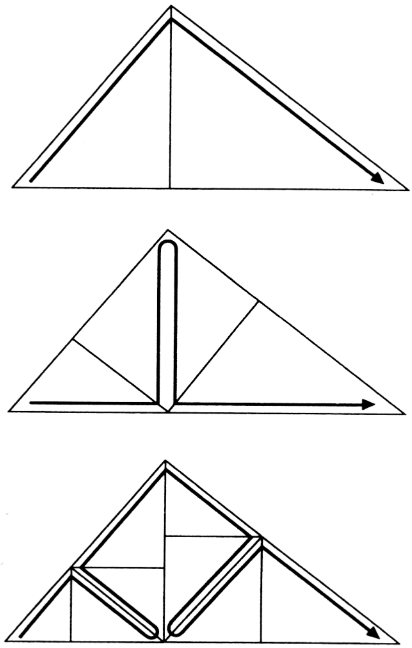


図 4.6.6 ポーヤ曲線に対する 1 次から 3 次の近似多角形に対する近似

ヤの結果を知らずに，ハーンは，曲線上の各点がせいぜい $\mathcal{I}$ で 3 つの前像を持つようなペアノの写像 (3.1.1) の修正方法を示した (Hahn[1]).

ポーヤ曲線に対する近似多角形への近似は，図 4.6.6 における最初の 3 つの多角形を示したように現れる.

§4.7 問題

1. シェルピンスキー–クノップ曲線がいたるところ微分不可能であることに，2.2 節で示したような「幾何的 (geometric)」証明を与えなさい.
2. 変換式 (4.3.1) を検証しなさい.
3. シェルピンスキー–クノップ曲線が連続であることの「幾何的」で解析的な証明を与えなさい.

4. (4.3.4) 式を検証しなさい.
5. (4.2.4) 式と (4.3.4) 式を使って, 次の値を評価しなさい. $f_s(0\dot{_2}1101011)$, $f_s(0\dot{_2}0000001)$, $f_s(0\dot{_2}11111111)$.
6. $t = 1, 2, 3$ に対して $s_t = s_{t-1} + S_{t-1}s_3$ を示しなさい.
7. t が有限4進数あるいは無限に続く3を持った等価な無限4進数によって表されるかどうかに拘わらず, (4.3.3) 式が同じ結果を生じることを示しなさい. (問題6からの結果を使いなさい.)
8. (4.3.4) 式に基づいて, シェルピンスキー–クノップ曲線の第2要素 ψ_s が, いたるところ微分不可能であることの解析的証明を与えなさい.
9. 図 4.6.3 と 4.6.4 の図式化が $r = \sqrt{(3 - \sqrt{5}/2}$ のときだけ得られることを示しなさい.
10. 図 4.2.1 (d), (e), ... で与えられたような図式化において, $\nu(P) = 8$ を持った点 P が $r = 1/\sqrt{2}$ のときだけ現れることを示しなさい. (すなわち, $\mathcal{T}$ が二等辺のとき.)
11. (4.1.1) 式と (4.1.1a) 式のシェルピンスキーの定義から, シェルピンスキー–クノップ曲線の表現 (4.3.4) 式を推測しなさい. (シェルピンスキー曲線からシェルピンスキー–クノップ曲線を得るために, 回転と大きさの変換がなされ, 曲線が半分に切り取られなければならないことに注意 —— 図 4.1.1 と 4.2.1 を参照.)

第 5 章　ルベーグの空間充填曲線

§5.1　カントール集合

カントールは，連続体の性質を調べ，1883 年に書いた無限線形点多様体に関する論文において，いかに小さくても，任意の区間において稠密でない完全集合（すべての集積点の集合に等しい集合）の例として，

$$\frac{2t_1}{3}+\frac{2t_2}{3^2}+\frac{2t_3}{3^3}+\frac{2t_4}{3^4}+\cdots$$

によって表現できるすべての点の集合を，付録に載せている (Cantor[2])．ここで，$t_j=0$ または 1 である．付録での反例としてつつましく始まったこの集合は，それから人気を得て，数学解析の最も奥まった部分への研究に対する例，反例，思いつきとして，その始まりからずっと役立った．その集合が，空間充填曲線の研究において，基本的役割 (fundamental rôle) をはたしていることとは異なっている．第 6 章では，この役割が第 5 章で見い出されるより以上に基本的なものであることをみるであろう．

カントール集合あるいは（後に説明する理由から）**中央の 1/3 を除いた集合**と呼ばれ，Γ と記されるこの集合は，

$$\Gamma=\{0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots|t_j=0 \quad \text{または} \quad 1\} \tag{5.1.1}$$

によって表現される．関数 $g(0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots)=0_{\dot{2}}t_1t_2t_3\ldots$ は，Γ からすべての 2 進数の集合 $\mathcal{B}=\{0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots|b_j=0 \quad \text{または} \quad 1\}$ への $1-1$ 写像を定義する．ここで，$\mathcal{I}\subset\mathcal{B}$ である．一方，$\Gamma\subset\mathcal{I}$ であり，

$$\mathcal{I}\subset\mathcal{B}\longleftrightarrow\Gamma\subset\mathcal{I}$$

を得る．その結果，$\Gamma \leftrightarrow \mathcal{I}$ となる，すなわち，カントール集合 Γ は，連続体のカージナル数 $\mathfrak{c}$ を持つ．

$\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ と $\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{W}$ から，

$$\Gamma \longleftrightarrow \mathcal{Q} \quad \text{と} \quad \Gamma \longleftrightarrow \mathcal{W}$$

を得る．Γ から $\mathcal{Q}$ や $\mathcal{W}$ への

$$f(0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{2}}t_1t_3t_5\ldots \\ 0_{\dot{2}}t_2t_4t_6\ldots \end{pmatrix} \tag{5.1.2}$$

と

$$F(0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{2}}t_1t_4t_7\ldots \\ 0_{\dot{2}}t_2t_5t_8\ldots \\ 0_{\dot{2}}t_3t_6t_9\ldots \end{pmatrix} \tag{5.1.3}$$

のような連続写像が存在することに，興味が湧く．ここで，$t_j = 0$ または 1 である．(これらの写像は，もちろん単射**でない**.)

(5.1.2) 式と (5.1.3) 式において定義される写像 $f : \Gamma \to \mathcal{Q}$ と $F : \Gamma \to \mathcal{W}$ は，全射である． ((5.1.2) 式に対するこの命題のみを証明する．他の場合の証明は，同様である.)

$p \in \mathcal{Q}$ としよう．p の座標は，2 進数

$$p = \begin{pmatrix} 0_{\dot{2}}a_1a_2a_3\ldots \\ 0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots \end{pmatrix}$$

によって表される．$t = 0_{\dot{3}}(2a_1)(2b_1)(2a_2)(2b_2)(2a_3)(2b_3)\ldots$ とすると，(5.1.2) 式によって，$f(t) = p$ となる．□

(5.1.2) 式と (5.1.3) 式において定義される写像 $f : \Gamma \to \mathcal{Q}$ と $F : \Gamma \to \mathcal{W}$ は，連続である． (再び，(5.1.2) 式に対する証明のみを与える.) $|t - t_0| < \frac{1}{3^{2n}}$ としよう．t_0 と t は，最初の $2n$ 個の 3 進の位置において違いがなく，

$$\begin{aligned} t_0 &= 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)\ldots(2t_{2n})(2t_{2n+1})\ldots, \\ t &= 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)\ldots(2t_{2n})(2\tau_{2n+1})\ldots \end{aligned}$$

を得る．反対に，$t_{2n} \neq \tau_{2n}$ としよう．すなわち，$|t_{2n} - \tau_{2n}| = 1$ と

$$t - t_0 = (2\tau_{2n} - 2t_{2n})/3^{2n} + (2\tau_{2n+1} - 2t_{2n+1})/3^{2n+1} + \cdots$$

であり，したがって，$< 1/3^{2n}$ に代わって，

$$\begin{aligned} |t - t_0| &\geq (2/3^{2n}) - (2/3^{2n+1})(1 + 1/3 + 1/9 + \cdots) \\ &= 2/3^{2n} - 1/3^{2n} = 1/3^{2n} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (\tau_{2n+1} - t_{2n+1})/2^{n+1} + (\tau_{2n+3} - t_{2n+3})/2^{n+2} + \cdots \\ (\tau_{2n+2} - t_{2n+2})/2^{n+1} + (\tau_{2n+4} - t_{2n+4})/2^{n+2} + \cdots \end{pmatrix},$$

であり，

$$\|f(t) - f(t_0)\| < \sqrt{2}/2^n$$

となり，連続性が得らた．□

(5.1.2) 式と (5.1.3) 式において定義される写像 $f : \Gamma \to \mathcal{Q}$ と $F : \Gamma \to \mathcal{W}$ は，いたるところ微分不可能である． (再び，その証明は (5.1.2) の場合に対してのみ行う.)

$$\begin{aligned} t &= 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)\ldots(2t_{2n})(2t_{2n+1})(2t_{2n+2})\ldots, \\ t_n &= 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)\ldots(2t_{2n})(2\tau_{2n+1})(2t_{2n+2})\ldots, \end{aligned}$$

としよう．ここで，$\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod 2$ である．また，

$$|t - t_n| = 2/3^{2n+1}$$

である．φ が f の第 1 要素であるならば，

$$\varphi(t) - \varphi(t_n) = (t_{2n+1} - \tau_{2n+1})/2^{n+1}$$

と

$$|\varphi(t) - \varphi(t_n)|/|t - t_n| = \frac{3}{4}\left(\frac{9}{2}\right)^n \longrightarrow \infty$$

となり，したがって，φ が Γ に関していたるところ微分不可能となる．同様の証明は，f の第 2 要素 ψ に適用される．□

まとめると，次のようになる．

定理 (5.1)　(5.1.2) 式と (5.1.3) 式によって定義される写像は，全射，連続，いたるところ微分不可能である．

H. ルベーグや I. J. シェーンベルクは，空間充填曲線を得るために，これらの写像を全区間 $\mathcal{I}$ に拡大した．このことについては，5.4 節と第 7 章で述べる．ハンス・ハーンは，線分の連続像として得られる最も一般的な集合の特徴づけに関する出発点として，それら ── 第 2 の考え ── を使った．そのことによって，彼は，第 6 章で見るような空間充填曲線の構成に関する一方法を与えた．

§5.2　カントール集合の性質

(5.1.1) 式において定義されたカントール集合は，$\mathcal{I}$ から真ん中の 1/3 区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を除き 2 つの閉区間 $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ を残すことによって得られる．次に，これら 2 つの区間 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ の真ん中の 1/3 区間を除き，4 つの閉区間 $\left[0, \frac{1}{9}\right]$，$\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$，$\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ を残す．再び，残ったものの真ん中 1/3 を取り除き，この処理を無限に続ける．(図 5.2.1 を参照.)

この仮定が (5.1.1) 式のカントール集合を導くことは，次のように見ることができる．$\mathcal{I}$ 内のすべての数が，$t_j = 0$ か 1 か 2 である 3 進表現

$$t = 0_{\dot{3}} t_1 t_2 t_3 \ldots$$

で表現されるならば，$\mathcal{I}$ から真ん中 1/3 の $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を除くことによって，$0_{\dot{3}}1$ 以外の 3 進表現 $0_{\dot{3}}1t_2t_3t_4\ldots$ のすべての数を取り除く．$0_{\dot{3}}1$ は，$0_{\dot{3}}0\overline{2}$ とも書くことができる．次のステップで，$0_{\dot{3}}00\overline{2}$ と $0_{\dot{3}}20\overline{2}$ として書き換えられる $0_{\dot{3}}01$ と $0_{\dot{3}}21$ 以外の 3 進表現 $0_{\dot{3}}01t_3t_4t_5\ldots, 0_{\dot{3}}21t_3t_4t_5\ldots$ のすべての数を

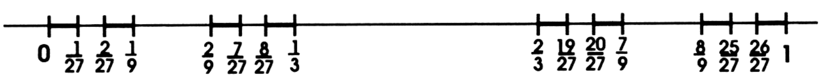


図 5.2.1　カントール集合の生成

取り除く．この方法を繰り返し，集合 Γ^* を作る．その点集合は，0 と 2 だけを持った 3 進表現により表されるものである．これは，(5.1.1) 式で定義されたようなカントール集合である．次の命題が成り立つ．

命題 (5.2.1)　t の少なくとも 1 つの 3 進表現が数字 1 を含まない，すなわち，$\Gamma = \Gamma^*$ のとき，かつそのときに限り，$t \in \Gamma^*$ である．(1 で終わるすべての有限 3 進数が無限に続く 2 を持った無限 3 進数として書き換えられる．)

証明　$n = 1$ に対して，$a_1 = 0_{\dot{3}}1$ と $b_1 = 0_{\dot{3}}2$ であれば，区間 (a_n, b_n) が除かれることを見てきた．$n = 2$ に対して，$a_2 = 0_{\dot{3}}01$，$b_2 = 0_{\dot{3}}02$，または，$a_2 = 0_{\dot{3}}21$，$b_2 = 0_{\dot{3}}22$ であれば，その区間は取り除かれる．一般に，a_n, b_n が，次の形式

$$\begin{aligned} a_n &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})1 \\ b_n &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})2 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

で書き換えられるとき，かつそのときに限り，その区間は取り除かれる．このことが真であるとしよう．次の $(n+1)$ 番目の段階において，

$$a_{n+1} = b_n + 1/3^{n+1},\quad b_{n+1} = a_{n+1} + 1/3^{n+1}$$

となり（図 5.2.2 を参照），また，その結果，

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_{\dot{3}})\ldots(2a_{n-1})2 + 1/3^{n+1} \\ &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})21, \\ b_{n+1} &= a_{n+1} + 1/3^{n+1} \\ &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})22 \end{aligned}$$

となり，あるいは，

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{2}{3^{n+1}} = 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)\ldots(2a_{n-1})1 - \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)\ldots(2a_{n-1})01, \end{aligned}$$

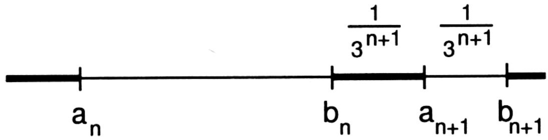


図 5.2.2　カントール集合の生成の第 $(n+1)$ ステップ

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n - \frac{1}{3^{n+1}} = 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)\ldots(2a_{n-1})1 - \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)\ldots(2a_{n-1})02 \end{aligned}$$

となる．これは，(5.2.1) 式において n を $n+1$ で置き換えたものである．よって，(5.2.1) 式の妥当性は帰納法によって示された．

$t \in (a_n, b_n)$ であれば，

$$t = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_{n-1})1\tau_{n+1}\tau_{n+2}\cdots$$

となる．すべて $\tau_{n+j} = 0$ ならば，$t = a_n \notin (a_n, b_n)$，または，すべて $\tau_{n+j} = 2$ ならば，$t = b_n \notin (a_n, b_n)$ となる．よって，少なくとも $\tau_{n+j} \neq 0$ の 1 つと，少なくとも $\tau_{n+j} \neq 2$ の 1 つになる．ゆえに，点 t は，(もし 2 つ存在するならば) その両方の 3 進表現が少なくとも 1 つの数 1 を含むとき，かつそのときに限り，Γ^* の生成過程において除かれる．命題 5.1.1 は証明された．□

次に，

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \Omega_2 &= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\ &\vdots \\ \Omega_n &= (a_n^{(1)}, b_n^{(1)}) \cup (a_n^{(2)}, b_n^{(2)}) \cup \ldots \cup (a_n^{(2^{n-1})}, b_n^{(2^{n-1})}), \\ &\quad \vdots \end{aligned} \qquad (5.2.2)$$

としよう．ここで，$(a_n^{(k)}, b_n^{(k)})$ は，Γ 生成のとき，n 番目のステップで $\mathcal{I}$ から取り除かれる 2^{n-1} 個の開区間である．すべての Ω_j が開であるので，$\Gamma^c = \mathcal{I}\backslash\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ は開であり，Γ は**閉である** (closed)．すなわち，それはすべての集積点を含む．実際，Γ は，**完全集合** (perfect set) である．すなわち，それはその集積点の集合 Γ' に等しい．

命題 (5.2.2)　$\Gamma = \Gamma'$．特に，$0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)\overline{2} \in \Gamma$ のすべての点は右集積点であり，また，$0_{\dot{3}}(2t_1)\,(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n) \in \Gamma$ のすべての点は左集積点である．そして，Γ のすべてのその他の点は左と右の集積点である．

証明　まず，

$$t = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)\overline{2}$$

と

$$t^{(k)} = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)22\ldots 20\overline{2}$$

としよう．ここで，(2 で置き換えた) 0 が $(n+k)$ 番目の位置にある．そのとき，$t^{(k)} \in \Gamma$ であり，$\{t^{(k)}\} \to t-0$ である．

$$t = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)$$

と

$$t^{(k)} = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)000\ldots 02$$

としよう．ここで，最後の 2 は，$(n+k)$ 番目の位置である．そのとき，$t^{(k)} \in \Gamma$ と $\{t^{(k)}\} \to t+0$ である．

最後に，$t = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)\ldots$ としよう．ここで，無限に多くの $t_j = 0$ が存在し，無限に多くの $t_j = 1$ が存在する．また，$\tau_n = t_n + 1 \pmod 2$ のとき，

$$t^{(n)} = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_{n-1})(2\tau_n)(2t_{n+1})\ldots,$$

となる．よって，$t^{(n)} \in \Gamma$ であり，$\{t^{(n)}\} \to t$ である．　□

カントール集合は，$\mathcal{I}$ 内の**任意の空間** (any space) を占めていない．

命題 (5.2.3)　$\Lambda_1(\Gamma) = J_1(\Gamma) = 0$.

証明

$$
\begin{aligned}
&\Gamma \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \Gamma_1 \\
&\Gamma \subset \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = \Gamma_2 \\
&\Gamma \subset \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right] = \Gamma_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{5.2.3}
$$

とし，$k \to \infty$ のとき，$J_1(\Gamma_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$ であるので，この命題は簡単に成り立つ．□

§5.3　カントール関数と悪魔の階段

この節の内容は，以後，問題 9.18 以外には使われないであろう．そこで，ここでは,「興味ある脇道 (interesting aside)」としてながめることにしよう．

Γ から $\mathcal{Q}$ への連続全射は，(5.1.2) 式の写像以外に，関数 $\gamma : \Gamma \to \mathcal{I}$ によって得られる．これは，

$$
\gamma(0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)(2t_4)\ldots) = 0_{\dot{2}}t_1t_2t_3t_4\ldots, t_j = 0 \quad \text{または} \quad 1 \tag{5.3.1}
$$

によって定義される．この写像は，単射ではないことに注意されたい．たとえば，$0_{\dot{3}}0\overline{2}$ と $0_{\dot{3}}2$ は，$0_{\dot{2}}1$ に写像される．

この関数は全射であり，連続であることが (5.3.1) 式の定義からすぐにわかる．したがって，$f_h \circ \gamma$, $f_p \circ \gamma$, $f_s \circ \gamma$ **は，すべて Γ から連続して $\mathcal{Q}$ に写像する**[1]．

---

1 ［訳註］f_h は定義 (2.1) を，f_p は (3.1.1) 式を，f_s は 4.2 節を参照.

γ の定義は，Γ^c 上でそれを次のように定義することによって，$\mathcal{I}$ のすべてに連続して拡張される．$t \in \Gamma^c$ ならば，$t \in (a,b)$ である．ここで，開区間 (a,b) は，カントール集合の作り方において，$\mathcal{I}$ から取り除かれたものの 1 つである．

$$a = 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})1 = 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})0\overline{2},$$
$$b = 0_{\dot{3}}(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots(2a_{n-1})2$$

は，命題 5.1 の証明で見てきた（(5.2.1) 式を参照）．したがって，$\gamma(a) = 0_{\dot{2}}a_1a_2a_3\ldots\, a_{n-1}0\overline{1}$，$\gamma(b) = 0_{\dot{2}}a_1a_2a_3\ldots\, a_{n-1}1$，すなわち，$\gamma(a) = \gamma(b)$ である．カントール集合の作り方において，取り除かれる各開区間 (a,b) 上で，

$$\gamma(t) = \gamma(a)(= \gamma(b)),\ t \in (a,b) \tag{5.3.1a}$$

を定義する．(5.3.1) 式と (5.3.1a) 式において定義した関数

$$\gamma : \mathcal{I} \overset{\text{onto}}{\longrightarrow} \mathcal{I}$$

は，**カントール関数** (Cantor function) と呼ばれる．構成において，γ は増加する．**増加関数は飛びの不連続部分を持つか，さもなくば連続である**．これを見るためには，$\lim_{t\to c-0}\gamma(t)$ と $\lim_{t\to c+0}\gamma(t)$ がすべての $c \in \mathcal{I}$ に対して存在し，

$$\lim_{t\to c-0}\gamma(t) \le \gamma(c) \le \lim_{t\to c+0}\gamma(t)$$

であることだけを示せばよい．($c = 0$ においてこの不等式の左辺が省略され，$c = 1$ において右辺が省略される.)

$\mathcal{A} = \{\gamma(t) | 0 < t < c\}$ としよう．γ が増加するので，$\mathcal{A}$ は上限に $\gamma(c)$ を持つ．よって，$\sup\mathcal{A} = \alpha$ が存在し，$\alpha \le \gamma(c)$ となる．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\alpha - \epsilon < \gamma(t_1) \le \alpha$ となるような $\gamma(t_1) \in \mathcal{A}$ が存在する．γ が増加するので，$t \in (t_1, c)$ に対して，$\alpha - \epsilon < \gamma(t) \le \alpha$ となる．よって，$t_1 < t < c$ のとき，常に $|\gamma(t) - \alpha| < \epsilon$ である．これは，$\lim_{t\to c-0}\gamma(t)$ が存在し，$\lim_{t\to c-0}\gamma(t) = \alpha \le \gamma(c)$ となることを意味する．$\lim_{t\to c+0}\gamma(t)$ が存在することと $\lim_{t\to c+0}\gamma(t) \ge \gamma(c)$ は同じ方法で示される．

しかし，γ は，いかなる飛びの不連続も持たない．それが c で 1 つ持てば，$\mathcal{I} = \gamma_*(\mathcal{I})$ は，$\gamma(c)$ をはさんで，$\gamma(c-0)$ と $\gamma(c+0)$ の間に切れ目を持つ．

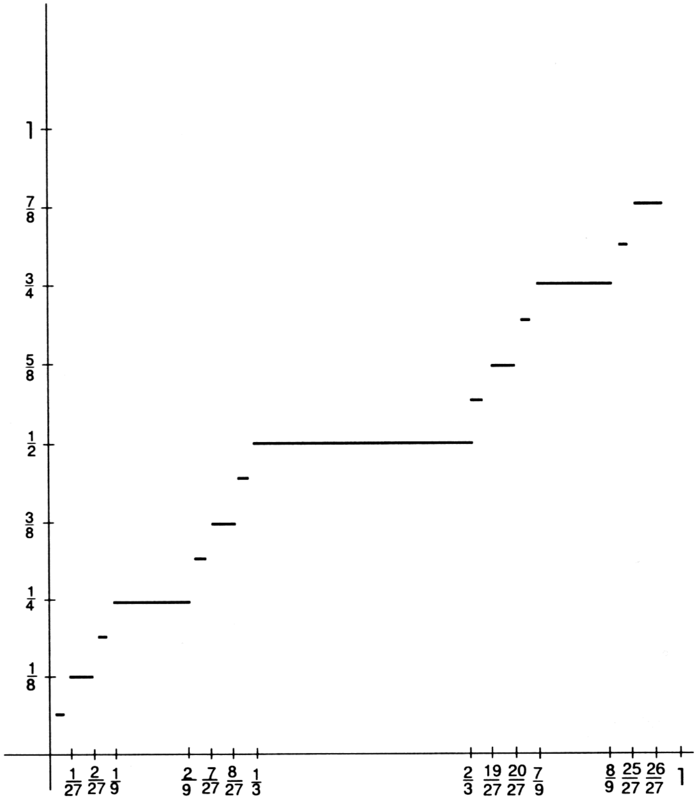


図 5.3 悪魔の階段

よって，**カントール関数は連続である**.

γ のグラフは**悪魔の階段** (Devil's Staircase) と呼ばれる. (図 5.3 を参照.)

§5.4 空間充填曲線のルベーグによる定義

アンリ・レーオン・ルベーグ (1875–1941) は，ボーベーに生まれ，パリに歿した. 数理科学の教師としての資格があるので，1894–1897 年に高等師範学校 (École Normal Supérieur) に出席した. 1899 年から 1902 年までナンシーの国立高等中学



校 (Lycée) で教えた後,「積分, 長さ, 面積 (Integrale, longeur, aire)」という論文で 1902 年に理学博士号を取得した. これは, 雑誌 *Annali di Matematica pura et applicata* に発表され, 現代積分学を先導した. 不幸にして, それは, 「先生であるÉ. ボレルを巻き込んで不愉快な論争を引き起こした」('Lebesgue et Borel s'opposèrent dans une violente polémique', Denjoy, Felix, and Montel[1]). ボレルは, ルベーグが何 1 つ新しいことを見つけなかったことと, ボレル集合族が (ルベーグの) 可測集合族と同一であることを主張した. この疑問は, M. ススリンがルベーグ可測であるがボレル集合でない解析集合と呼んだものを構成した 1917 年まで, 解決されなかった. すでに 165 編の出版物を持つルベーグは, 1920 年までに 82 の本や論文を出版した. そのとき, パリ大学の理学部で幾何の応用解析の教授となった. 1921 年には, コレジュ・ド・フランスの数学の教授となった. また, 1922 年にパリ大学の科学アカデミーの会員に選ばれた. A. ダンジョワ, L. フェリックス, P. モンテルは, 「ルベーグが可測関数の空間を導入し, すばらしい (immense) 発展」と呼んだ ('Lebesgue introduisit l'espèce des fonctions mesurables. Les progrès était immense'. Loc. Cit. p.3). ポール・モンテルは, ルベーグの生涯を次の言葉でまとめた.「彼は偉大な学者であり, すばらしい教授であり, 比較できない程の知性と高貴な気質の持主である. 数学の発展における彼の影響は, 彼が希望を与えたものと同様, 彼自身の業績を通して長い間続くだろう.」('Il a été un grand savant, un professeur admirable, un homme d'une incomparable noblesse morale. Son influence sur le développement des mathématiques continuera longtemps à s'exercer par ses oeuvres propres et par celles qu'il a inspirées.' Denjoy, Felix, and Montel[1], p.18) (より詳しくは, Hawkins[1], Denjoy[1], Denjoy, Felix, and Montel[1], Montel[1] を参照.)

1904 年に H. ルベーグは, (5.1.2) 式の $\mathcal{I}$ への連続写像 f を線形補間 (linear interpolation) によって拡張した (Lebesgue[1], [2]). (a_n, b_n) が n 番目のステップで, Γ の構成において取り除かれる区間であるならば, 拡張関数 f_l は, その区間における f によって,

$$f_l(t) = \frac{1}{b_n - a_n}[f(a_n)(b_n - t) + f(b_n)(t - a_n)], a_n \le t \le b_n \qquad (5.4.1)$$

と定義される．作り方において，(f と同様に) f_l は Γ^c **上で連続であり**，$\mathcal{I}$ **を** $\mathcal{Q}$ **に写像する**．そこで，次のことを示そう．

定理 (5.4.1)　(5.1.2) 式において定義され，(5.4.1) 式において Γ^c に拡張された写像 f_l は，$\mathcal{I}$ 上で連続である．

証明　$t_0 \in \Gamma^c$ であれば，f_l は構成上 t_0 において連続である．$t_0 \in \Gamma$ であれば，命題 5.2.2 によって，左集積点か右集積点か集積点のいずれかである．t_0 が左集積点である場合のみを考えよう．すなわち，$0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)$ であり，それを Γ の構成において取り除かれた区間の右終点とする．定理 5.1 によって，f（f_l の Γ への制限）は，Γ 上で連続であり，Γ がコンパクトであるから，Γ 上で単調連続である．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，$|t_1 - t_2| < \delta$ となるすべての $t_1, t_2 \in \Gamma$ に対して

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon \qquad (5.4.2)$$

となる．

$\| f(t) - f(t_0) \|$ を調べてみよう．$t \in \Gamma$ または $t \in \Gamma^c$ の 2 つの可能性がある．$t \in \Gamma$ であれば，(5.4.2) 式によって，$|t - t_0| < \delta$（ただし，$t \in \Gamma$）に対して，

$$\|f(t) - f(t_0)\| < \epsilon \qquad (5.4.3)$$

となる．$t \in \Gamma^c$ であれば，$t \in (a, b)$ となる．ここで，(a, b) は，Γ（$a, b \in \Gamma$, $(a, b) \subset \Gamma^c$）の構成において取り除かれた区間の 1 つである．(5.4.1) 式から，すべての $t \in (a, b)$ に対して，

$$f_l(t) - f_l(t_0) = \frac{1}{b - a}[(f(b) - f(t_0))(t - a) + (f(a) - f(t_0))(b - t)]$$

となる．(a, b) を，$t_0 < a < b < t_0 + \delta$ を持った任意のそのような区間としよう．(5.4.3) 式から，すべての $t \in (a, b) \subset \Gamma^c$ に対して，

$$\|f_l(t) - f_l(t_0)\| < \frac{1}{b - a}(t - a + b - t)\epsilon = \epsilon$$

となる．

f_l が構成上 t_0 の左に（t_0 は除いた区間の右終点であるが）連続であるということから，これは，$t_0 \in \Gamma$ での f_l の連続性を意味する．同様の証明が Γ の右集積点に適用され，また，両方の証明には，Γ の両側の集積点に注意する必要がある．よって，ここでの命題は証明された．(より簡単な「幾何的」証明は次節において与えられる.) □

ルベーグは，同様の方法で，n 次元単位超立方体への連続写像とさらに結果として $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ を持つ $\aleph_0$ 次元の単位超立方体への連続写像を得ることができることを示した (Lebesgue[2])．これは，6.9 節でより詳細に論じる．ルベーグの生成の一般化は，Hahn[1](pp.51–55) において見つけられる．

f_l は，可付番で多くの互いに素な開区間（その和集合が Γ^c であるが）に関して，(5.4.1) 式のような線形補間によって定義されているので，Γ^c 上で微分可能である．Γ に対する f_l の制限である (5.1.2) 式で定義された写像 $f : \Gamma \to \mathcal{Q}$ が，Γ 上でいたるところ微分不可能であるので，f_l は Γ に関して，いたるところ微分不可能であることがわかる．最後に，$\Lambda_1(\Gamma) = 0$ より，次の定理を得る．

定理 (5.4.2)　ルベーグの空間充填曲線は，ほとんどいたるところ微分可能である．特に，Γ^c 上では，微分可能であるが，Γ 上では微分不可能である．

今まで，すべての既知の空間充填曲線は，いたるところ微分不可能である．これが不可避なものと仮定されていた．しかし，ルベーグの例はそれに終止符を打ったのである．

一方，ルベーグの空間充填曲線は，第 2, 3, 4 章において議論したすべての曲線に共通する一性質を欠いている．それは，これらの曲線のいかなる部分も再び空間充填曲線になるという性質である．たとえば，区間 $[(k-1)/2^{2n}, k/2^{2n}]$ (ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{2n}$) 上のヒルベルト曲線の一部は，$2^n : 1$ 比に縮小した全曲線の正確なレプリカ（複製）である．(同じことは，縮小率 $3^n : 1$ の区間 $[(k-1)/3^{2n}, k/3^{2n}]$ 上のペアノ曲線に対しても成り立ち，また，縮小率 $2^{n/2} : 1$ の区間 $[(k-1)/2^n, k/2^n]$ 上のシェルピンスキー曲線

に対しても成り立つ.）E. チェザロがフォン・コッホ曲線について語ったことは (Cesàro[2])，これらの曲線に同様に適用される．'Si elle était douée de vie, il ne serait pas possible de l'anéantir, sans la suprimer d'emblée car elle renaîtrait sans cesse des profoundeurs de ses triangles, comme la vie dans l'universe.' ヒルベルト曲線とペアノ曲線の場合では，**三角形** (triangle) を**正方形** (carrés) に置き換えなければならない.（「もし彼女が命を吹き込まれたならば，── フランスでは，曲線が女性詞である ── 彼女をすべて取り除かずに彼女をこわすことはできなかったであろう．なぜならば，彼女は，宇宙における生命のように，この三角形の奥底 (depth) に絶えず復活するであろうから[2].」）逆に，ルベーグ曲線をいわゆる Γ_2 上で「切る (kill)」ならば，本当に「死ぬ (dead)」であろう[3]．なぜならば，残されるようなすべてのものは，直角でお互いを二等分する単位長の 2 つの断片であるからである.

ほとんどいたるところ微分可能な空間充填曲線が存在することがわかったので，今度は，いたるところ微分可能な曲線が，空間を充填するかという質問が生じる．1980 年には，M. モラインは次のことを証明した．φ がルベーグ可測であり，$\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ の少なくとも 1 つが各 $t \in \mathbb{R}$ に対して存在し，$f_*(\mathbb{R})$ がルベーグ可測であるとすると，$f = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ならば，$\Lambda_2(f_*(\mathbb{R})) = 0$ である (Morayne[1], 定理 3, p.131)．$f_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ が微分可能であり，$J_2(f_{1*}(\mathcal{I})) > 0$ としよう．すなわち，f_1 が微分可能な空間充填曲線を表すとしよう．また，$\delta : \mathbb{R} \leftrightarrow (0,1)$ が微分同相としよう．$J_2(f_{1*}((0,1))) > 0$ であり，また，関数 $f_1 \circ \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ がモライン定理の条件を満足し，したがって，$\Lambda_2(f_{1*} \circ \delta(\mathbb{R})) = \Lambda_2(f_{1*}((0,1))) = \Lambda_2(f_{1*}(\mathcal{I})) = J_2(f_{1*}(\mathcal{I})) = 0$ となり，仮定に反することに注意されたい．よって，**微分可能な空間充填曲線は存在しない**.（モラインの論文には，驚くべき発表の歴史がある．1980 年に雑誌 *Colloquium Mathematicum* に投稿し，最初 1984 年に，他人の論文が最初のページに入ってしまったため，第 XLVIII 巻の第 2 分冊に発表されたが，それは理解不能となった．それから第 XLIX 巻の第 1 分冊に 136 ペー

[2]［訳註］図 9.1.2 参照.

[3]［訳註］図 5.5.1 参照.

ジから 137 ページに割り込んだ形で再発表され，最後にやっと，1987 年の第 LIII 巻の第 1 分冊にページづけられ，完全な状態で出版された.）モラインの結果の一般化については，Morayne[2] と Cichoń and Morayne[1] を参照せよ.

§5.5　ルベーグ曲線の近似多角形

1986 年の論文 (Sagan[2]) では，ルベーグ曲線の近似多角形の一表記法が示され，1993 年の論文 (Sagan[10]) では，その他の表記法が示された．第 8 章に向けて，ここでは後者の表記を使う．この概念にたどりつくため，最初に，(5.2.3) 式の集合 Γ_2 を作る閉区間 $\left[0,\frac{1}{9}\right]$，$\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$，$\left[\frac{8}{9},1\right]$ を，図 5.5.1 のような $\mathcal{Q}$ の 4 つの部分正方形 $\mathcal{Q}_{00},\mathcal{Q}_{01},\mathcal{Q}_{10},\mathcal{Q}_{11}$ へ写像しよう.

これらの部分正方形は，Q から相似変換

$$\mathfrak{L}_{00}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ell_{00}$$
$$\mathfrak{L}_{01}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ell_{01}$$
$$\mathfrak{L}_{10}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ell_{10}$$
$$\mathfrak{L}_{11}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\triangleq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ell_{11}$$

によって得られる.

$t=0_{\dot{3}}00(2t_3)(2t_4)\ldots$ のとき $t\in\left[0,\frac{1}{9}\right]$，$t=0_{\dot{3}}02(2t_3)(2t_4)\ldots$ のとき $t\in\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$，$t=0_{\dot{3}}20(2t_3)(2t_4)\ldots$ のとき $t\in\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$，$t=0_{\dot{3}}22(2t_3)(2t_4)\ldots$ のとき $t\in\left[\frac{8}{9},1\right]$ なので,

$$\ell_{ij}=\begin{pmatrix}t_i\\ t_j\end{pmatrix}$$

となる．次に，図 5.5.1 の分割した正方形にこれらの変換を適用して，図 5.5.2 に描かれた $\mathcal{Q}$ の 16 の部分正方形への Γ_4 の写像を得る.

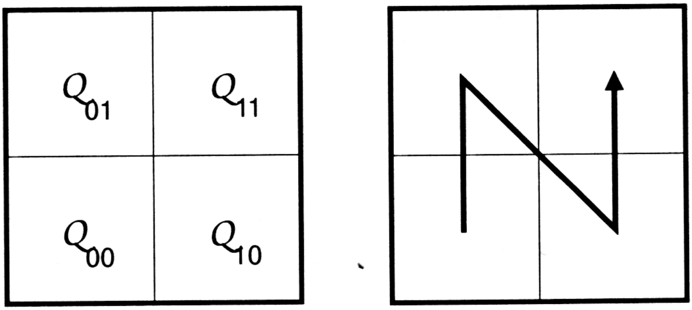


図 5.5.1　Γ_2 の Q への写像

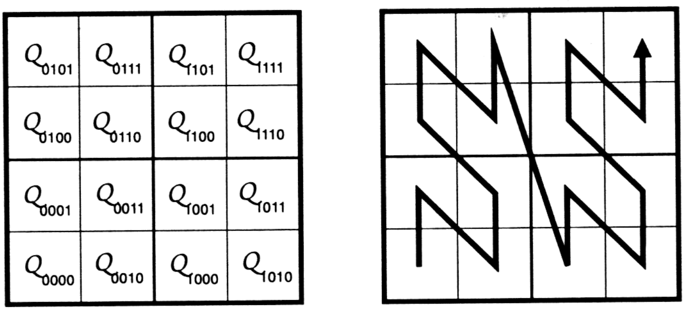


図 5.5.2　Γ_4 の Q への写像

この過程を無限に繰り返し，2.4，3.4，4.3 節のような $t \in \Gamma$ に対する像 $f(t)$,

$$f(0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ell_{2j-1\ 2j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \begin{pmatrix} t_{2j-1} \\ t_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\dot{2}} t_1 t_3 t_5 \ldots \\ 0_{\dot{2}} t_2 t_4 t_6 \ldots \end{pmatrix}$$

を得る．これは，正に (5.1.2) 式である．

Γ_{2n} の閉区間の始点は,

$$t_b = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})$$

の形を持ち，

$$f(t_b) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{2}}t_1t_3\dots t_{2n-1} \\ 0_{\dot{2}}t_2t_4\dots t_{2n} \end{pmatrix}$$

に写像され，終点は，

$$t_e = t_b + \frac{1}{3^{2n}} = 0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})\overline{2}$$

の形を持つ．これは，

$$f(t_e) = \begin{pmatrix} 0_{\dot{2}}t_1t_3\dots t_{2n-1}\overline{1} \\ 0_{\dot{2}}t_2t_4\dots t_{2n}\overline{1} \end{pmatrix}$$

に写像される．また，これは，辺長 $\frac{1}{2^n}$ の部分正方形 $\mathcal{Q}_{t_1t_2\dots t_{2n}}$ において，$f(t_b)$ から対角に交叉する．そこで，ルベーグの空間充填曲線は，左下角の部分正方形 $\mathcal{Q}_{t_1t_2\dots t_{2n}}$ から入り，右上角の正方形に出る．まさに線形補間 (5.4.1) 式である直線によって，1 つの正方形からの出口の点を次の正方形の入口の点につなぐ．（$\mathcal{I}\backslash\Gamma_{2n}$ の開区間は，1 部分正方形の右上角から次に続く部分正方形の左下までの「結合線 (join)」上に線形に写像される）．これは，部分正方形の非対角線 (off-diagonal) と結合線から作られた多角形として，近似多角形の定義を表している．図 5.5.3 において最初の 2 ステップのそのような多角形を描いた．ここで，適切な生成を隠すことなく見せるため，いく

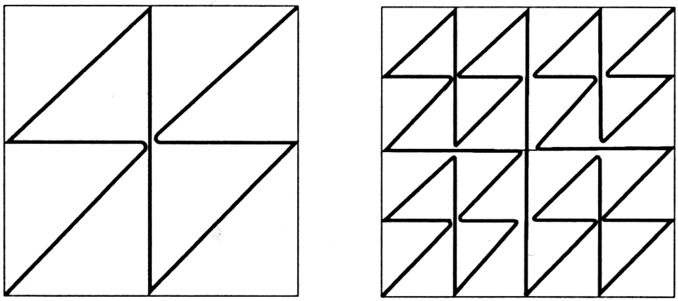


図 5.5.3 ルベーグの空間充填曲線に対する 1 次と 2 次の近似多角形

つかの角を丸めた．これらの多角形は，通常の意味で近似多角形である．その理由は，各部分正方形内で，近似多角形からルベーグの曲線までの距離は，対角の長さ $2^{-n+1/2}$ によって上限があり，ルベーグの曲線と結合線に沿って一致するからである．よって，それは，ルベーグ曲線に一様収束する一連の連続曲線を作る．このことは，他の**ルベーグ空間充填曲線の連続性の証明**をもたらす．

§5.6　問題

1. (5.1.3) 式で定義された写像が全射であり，連続であり，いたるところ微分不可能であることを証明せよ．
2. 次の点のうち，どれがカントール集合 Γ 内にあるか，$0_{\dot{3}}02021\overline{2}$, $0_{\dot{3}}01\overline{02}$, $0_{\dot{3}}0\overline{1}$, $0_{\dot{3}}10\overline{2}$, $0_{\dot{3}}2221$？
3. $1/4 \in \Gamma$ を示しなさい．
4. カントール集合の構成において，取り除いたすべての区間の始点と終点の集合 $\mathcal{S}$ は，Γ において稠密である．すなわち，任意の $\gamma \in \Gamma$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して，$|s-\gamma| < \epsilon$ であるような要素 $s \in \mathcal{S}$ が存在することを示しなさい．
5. ルベーグの空間充填曲線が，Γ のすべての右集積点と Γ のすべての両側の集積点において連続であることを証明しなさい．
6. (5.3.1) 式における Γ から $\mathcal{I}$ への写像 γ が連続であり，全射であることを証明しなさい．
7. ほとんどいたるところ $\gamma'(t) = 0$ を示しなさい．ここで，γ は，(5.3.1) 式と (5.3.1a) 式において定義されたカントール集合である．
8. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ としよう．$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x-y|x, y \in \mathcal{A}\}$ は，**$\mathcal{A}$ の差集合** (difference set of $\mathcal{A}$) と呼ばれている．$\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{I}$ を示しなさい．
9. $\alpha \in (0,1)$ としよう．また，$\mathcal{I}$ から次のようにして得られる集合を Γ_α とする．まず，長さ $\alpha/2$ の開区間 $\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)$ を取り除き，それから，残りの 2 つの閉区間 Γ_0, Γ_1 から，長さ $\alpha/8$ の中央の開区間をそれぞれ取り除き，さらに，残った 4 つの閉区間 $\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{10}, \Gamma_{11}$ から，長

さ $\alpha/32$ の中央の開区間をそれぞれ取り除き，これを無限に繰り返す．$\Gamma_\alpha^{(1)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \Gamma_\alpha^{(2)} = \Gamma_{00} \cup \Gamma_{01} \cup \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11}$，などなどとしよう．そのとき，$\Gamma_\alpha = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Gamma_\alpha^{(j)}$．$\Gamma_\alpha$ を正の測度を持ったカントール集合と呼ぶ．

$\Lambda_1(\Gamma_\alpha) = 1 - \alpha$ を示しなさい．

10. $\alpha \in (0,1)$ に対して，$\Lambda_2(\Gamma_\alpha \times \Gamma_\alpha)$ を見つけなさい．(Γ_α の定義に対して問題 9 を参照.)

11. $t \in \Omega_j$（ただし，$j = 1,2,3,4$）に対して，$f'_\ell(t)$ を見つけなさい．ここで，Ω_j は (5.2.2) 式において定義されている．

12. $\mathbb{E}^n$ の有界集合 $\mathcal{S}$ は，もし，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k \quad と \quad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Vol}(\mathcal{C}_k) < \epsilon$$

であるような有限で多くの n 次元閉直角平行 6 面体 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ が存在するならば，n 次元ジョルダン容量 0 を持つ．$\mathcal{S}$ は，もし，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k \quad と \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(\mathcal{O}_k) < \epsilon$$

であるような開直角平行 6 面体 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n, \ldots$ の数列をみつけることができるならば，ルベーグ測度 0 を持つ．ジョルダン容量 0 を持った $\mathbb{E}^n$ のいかなる部分集合も，ルベーグ測度 0 を持つことを示しなさい．

13. 自然数列で，$0_{\dot{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\ldots(2t_n)$ の像点をつなぐ多角形パスとして，ルベーグの空間充填曲線に対する n 番目の近似多角形を定義しなさい．順番 1–7 の近似多角形を描きなさい．

14. 4.5 節において 2 次元曲線に対して行ったように，(5.1.3) 式の写像を連続で $\mathcal{I}$ に拡張することによって得られる 3 次元ルベーグ曲線を「幾何的に示し (Geometrize)」，第 1 と第 2 の近似多角形を描きなさい．

第 6 章　線分の連続像

§6.1　予備的所見と連続性の大局的な特徴づけ

正方形や三角形，そして区間 $\mathcal{I}$ の連続像として示されたそれらのすべての連続像に関して，そのような集合の一般的特徴づけに疑問が生じた．1908 年，A. シェーンフリースは本来 2 次元平面内の集合にだけ適用するような特徴づけを見つけた（Schoenflies[1], p.237 を参照）．1913 年，ハンス・ハーンとステファン・マズルキーウィッチは，独立に $\mathbb{E}^n$ のそのような集合の完全な特徴づけをした (Hahn[2], [3], Mazurkiewicz[1], [2], [3])．彼らの結果は，6.8 節の終わりで指摘するように，より一般的な空間に適用するために拡張することができる．6.7 節では，マズルキーウィッチの業績に簡単に触れながら，ハーンの方法を紹介する．本章の展開は，空間充填曲線のルベーグによる構成法の一般化と見ることができる．次の 2 つの要素がこの構成法を可能にしている．すなわち，まず第 1 に，正方形 $\mathcal{Q}$ が，カントール集合の連続像として表されたことである．また第 2 に，線形補間によって Γ から $\mathcal{I}$ への連続的な写像の定義を拡張できたことである．すなわち，この線形補間は，(正方形 $\mathcal{Q}$ にある）一直線によって，カントール集合の構成において取り除いた 1 区間の左端点の像を，その右端点の像につなげるものである．ハウスドルフは，いかなるコンパクト集合もカントール集合の連続像であることを示した．しかし，コンパクト性は，拡張した写像が連続であるように，前述の像が集合に残る一連続弧によってつなげられることを保証するのに十分ではなかった．コンパクト性に加えて連結性と局所連結性の条件は，このことがなされるこ

とを保証するものである．これらの3つの条件が同様に必要であることがわかり，線分の連続像の完全な特徴づけが成し遂げられる．ボン大学でハーンの学生であったマリー・トルホーストは，局所連結性が，2次元点集合の境界が連続曲線であるための必要十分であることを示した (Torhorst [1])．ハーンは，$\mathbb{E}^2$ に適用したとき，ハーンの条件とシェーンフリースの条件が同等であるというトルホーストの結果の基礎を示した (Hahn[4])．6.8節の終わりでは，線分の連続像の他のいくつかの特徴づけを述べよう．

ハーンの結果を議論するため，点集合位相へ簡単に回り道をしなければならない．この節と6.2節，6.3節，6.5節は，コンパクト性，連結性，局所連結性と，これらの性質が連続変換によっていかに影響されるかについて説明する．



ハンス・ハーン (1879–1934) はウィーンで生まれ，そこで歿した．1898年には，法律を学ぶため大学に入学した．1年後，シュトラスブルク大学で数学に転学した．1900年から1901年にかけての秋学期に，ミュンヘン大学に行き，1901年の春学期に大学に戻った．彼はそこにとどまり，1902年7月に博士号を取得した．彼は，グスタフ，リッター・フォン・エシェリッヒの指導の下，2次変分量の理論に関する論文を書いた．ウィーン大学において，メルテンスとボルツマンによる講義やボルツマンとフォン・エシェリッヒとメルテンスによるセミナーに出席しながら1年の残りを過ごした．1903年から1904年にかけての秋学期をゲッティンゲンにおいて，ヒルベルトやミンコフスキによる講義に出席し，ヒルベルトやクラインやミンコフスキによるセミナーに参加して過ごした．1904年の春学期において，ウィーンにもどり，ヴィルティンガーによる講義やセミナーに出席した．1905年から1909年までウィーン大学で無給大学講師として義務的な仕事の後，その頃オーストリア–ハンガリー帝国の一部だったブコビナのチェルノビッツ大学において教授となった．第1次世界大戦に参加し，1915年にひどく負傷し，勇敢な行為に対して勲章を授かった．1916年

には，ボン大学に行き，1921 年にはウィーン大学に戻った．ガン手術での早すぎる死までそこにとどまった．ハーンは，変分の微積分学におけるラグランジュ問題の発展に多くの貢献をした．彼は，マイヤーやフォン・エシェリッヒが初期の研究ですでに気づいていた特徴である,「擬法線極値 (anormal extremals)」を導入し，ラグランジュ問題のワイエルシュトラスの条件を最初に導いた．線形ノルム空間の線形多様体からノルムを保った全空間への線形関数の拡張に関する定理に対して，St. バナッハと名声を分かち合った．解析的関数の理論において，ワイエルシュトラスの素因数分解定理を 2 変数の解析的関数に一般化した．彼はまた，位相数学や実変数の関数論に多大な貢献をした.（詳しくは，Mayrhofer[1] を参照.）



ステファン・マズルキーウィッチ (1888–1945) はワルシャワに生まれ，そのすぐ近くで歿した．彼は，クラクフ大学，ミュンヘン大学，ゲッティンゲン大学，リボフ大学に通い，1913 年にシェルピンスキーの指導の下で，空間充填曲線 (‘O Krzywych wypelniajacych kwadrat’) に関する論文を書き，リボフ大学より博士号を取得した．1915 年には，新たに設立されたワルシャワのポーランド大学で，数学の教授になった．彼はポーランドにおいて，科学の第一人者となった．9 年間ワルシャワ大学で学部長を務め，1937 年には学長になった．1935 年からワルシャワ科学協会の事務総長を務めた．シェルピンスキーと共に，1920 年に彼とシェルピンスキーと Z. ジャニスゼウスキーが創刊した雑誌 *Fundamenta Mathematicae* の編集長だった.（ジャニスゼウスキーは，その後短い生涯を終えた）. 数学への彼の貢献は，主に位相数学，実解析，解析的関数論，確率論の分野にある．1940 年から 1944 年にかけて，すべてのポーランドの高等教育の機関が占領によって閉鎖されたとき，シェルピンスキーと他の数百の学者と共に，ポーランドの「秘密大学 (clandestine university)」において，安全面で大きな個人的リスクを背負いながら教え続けた.（1943 年から 1944 年にかけて，3800 人の学生がワルシャワのこの潜行的な大学に入学した.）ハーンのように，マズルキーウィッチもポーランド科学再編のための意欲的な計画に力を傾けていたが，57 歳で早すぎる生涯を閉じた．1944 年のワルシャワ大暴動後，市民は，キャンプに入れられるため，占領者によって立ち退かされた．南への長く骨の折れる集団移動中，彼は，やせ衰えた学者を哀れに思う善意でサマリア人がふるまった豊かな食事のために，胃の病気にか

かった．戦争によって引き裂かれたポーランドにおいて，彼の病気が回復する可能性もなく，その1年後に亡くなった．(マズルキーウィッチの死の詳細は，1992年11月3日，A. シンゼルとの著者の対話による．彼は前教授シェルピンスキーからそのことを聞いていた.) より詳しくは，Knaster[1], Kuratowski[3](pp.163–167), Mazurkiewicz[6](pp.9–26) を参照．

以下では，定義域 $\mathcal{D}(f)$ が $\mathbb{E}^m$ の部分集合であり，値域 $\mathcal{R}(f)$ が $\mathbb{E}^n$ の部分集合である関数 f を考えよう．$\mathbb{E}^m$ のベクトルである独立変数は，$m=1$ のときの独立変数を t で表すときを除き，x のような小文字によって表される．

定義 (6.1.1) $N_\delta(a)=\{x\in\mathbb{E}^n|\ \| x-a \|<\delta\}$ は，$a\in\mathbb{E}^n$ の δ 近傍 (δ-neighborhood) と呼ばれ，また，$N'_\delta(a)=\{0<\| x-a \|<\delta\}$ は，$a\in\mathbb{E}^n$ の除去された δ 近傍と呼ばれる．

定義 (6.1.2) $N_\delta(a)\subset\mathcal{A}$ のような $\delta>0$ が存在するならば，$a\in\mathcal{A}\subseteq\mathbb{E}^n$ は，$\mathcal{A}$ の内点 (interior point) と呼ばれる．$\mathcal{A}^0$ は，$\mathcal{A}$ のすべての内点の集合とし，$\mathcal{A}$ の内核 (interior) と呼ばれる．$\mathcal{A}$ が内点のみからなるならば，それは開集合である．すなわち，$\mathcal{A}^0=\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ の補集合 $\mathcal{A}^c$ が開集合であるならば，$\mathcal{A}$ は閉集合である．

定義 (6.1.3) 任意の $\delta>0$ に対して，$N'_\delta(a)\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$ であるならば，$a\in\mathbb{E}^n$ は，$\mathcal{A}\subseteq\mathbb{E}^n$ の集積点 (accumulation point) と呼ばれる．集合 $\mathcal{A}$ とそのすべての集積点の集合との和集合は，$\mathcal{A}$ の閉包 (closure) と呼ばれ，$\overline{\mathcal{A}}$ によって表される．$\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{B}$ ならば，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ において稠密 (dense) である．

命題 (6.1) ある集合がそのすべての集積点を含むならば，かつそのときに限りそれは閉である．すなわち，$\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{A}$ である．

証明 (a) $\mathcal{A}$ が閉であり，a が集積点であるが，$a\notin\mathcal{A}$ であるとしよう．そのとき，$a\in\mathcal{A}^c$ となる．$\mathcal{A}^c$ が開であるので，$N_\delta(a)\subset\mathcal{A}^c$ となる $\delta>0$ が

存在する．しかし，a は，$\mathcal{A}$ の集積点であるはずがない．

(b) $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ としよう．$x \notin \mathcal{A}$ ならば，$x \notin \overline{\mathcal{A}}$ となり，$N_\delta(x)$ が $\mathcal{A}$ からの点を含まないような $\delta > 0$ が存在する．すなわち，x が $\mathcal{A}^c$ の内点である．これは，すべての $x \notin \mathcal{A}$ に対して真であり，$\mathcal{A}^c$ が開である．定義 6.1.2 によって，$\mathcal{A}$ は閉である． □

定義 (6.1.4) $f_*(\mathcal{A}) = \{f(x) \in \mathcal{R}(f) | x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}(f)\}$ は，f による $\mathcal{A}$ の順像と呼ばれる．

（これは，定義 1.3.1 と同じであるが，わかりやすくするため，再度書いた.）

定義 (6.1.5) $f^*(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{D}(f) | f(x) \in \mathcal{B} \cap \mathcal{R}(f)\}$ は，$\mathcal{B}$ の f による逆像と呼ばれる．

以下のことに注意されたい．

$$f^* f_*(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{D}(f), f_* f^*(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}(f) \tag{6.1.1}$$

$$f_*(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = f_*(\mathcal{A}_1) \cup f_*(\mathcal{A}_2), f^*(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = f^*(\mathcal{B}_1) \cup f^*(\mathcal{B}_2) \tag{6.1.2}$$

$$f_*(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \subseteq f_*(\mathcal{A}_1) \cap f_*(\mathcal{A}_2), f^*(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = f^*(\mathcal{B}_1) \cap f^*(\mathcal{B}_2) \tag{6.1.3}$$

$$f_*(\mathcal{A}) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{D}(f) = \emptyset, f^*(\mathcal{B}) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{B} \cap \mathcal{R}(f) = \emptyset \tag{6.1.4}$$

$$(f \circ g)^*(\mathcal{A}) = g^* \circ f^*(\mathcal{A}). \tag{6.1.5}$$

最後は，次のようになる．すなわち，$t \in (f \circ g)^*(\mathcal{A})$ が $f(g(t)) \in \mathcal{A}$ を意味する．これは，順番に $g(t) \in f^*(\mathcal{A})$ となり，$t \in g^*(f^*(\mathcal{A}))$ となることを暗に意味する．一方，$t \in g^*(f^*(\mathcal{A}))$ は，$g(t) \in f^*(\mathcal{A})$ であり，$f(g(t)) \in f_*(f^*(\mathcal{A})) = A \cap R(f)$ となることを意味する．よって，$t \in (f \circ g)^*(\mathcal{A})$ である．

定義 (6.1.6) $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{E}^n$, $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{E}^m$ は，すべての $\epsilon > 0$ に対して，

$$f_*(N_{\delta(\epsilon,a)}(a)) \subset N_\epsilon(f(a))$$

となるような $\delta(\epsilon, a) > 0$ が存在すれば，$a \in \mathcal{D}(f)$ において連続である．関数は，$\mathcal{A}$ のあらゆる点において連続であるならば，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}(f)$ 上で連続である．

連続性に関する次の大局的特徴づけは，この後の展開において助けとなる．

定理 (6.1.1)　$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{E}^n$ は，あらゆる開集合 $\Omega \subseteq \mathbb{E}^n$ に対して，$f^*(\Omega) = \Omega_1 \cap \mathcal{D}(f)$ となるような開集合 $\Omega_1 \subseteq \mathbb{E}^m$ が存在するとき，かつそのときに限り，$\mathcal{D}(f)$ で連続である．

証明　(a) 定義 6.1.6 の条件が満たされていると仮定しよう．$\Omega \subseteq \mathbb{E}^n$ が開集合を表すとする．$f^*(\Omega) = \emptyset$ ならば，終了となる．それで，$f^*(\Omega) \neq \emptyset$ と仮定しよう．目的は，定理の条件を満たすような開集合 Ω_1 を作ることである．$a \in f^*(\Omega)$ ならば，$f(a) \in \Omega$ となる．Ω が開であるので，$N_\epsilon(f(a)) \subseteq \Omega$ となるような $\epsilon > 0$ が存在する．定義 6.1.6 によって，$f_*(N_{\delta(\epsilon,a)}(a)) \subset N_\epsilon(f(a))$ となるような $\delta(\epsilon, a) > 0$ が存在する．よって，$f_*(N_{\delta(\epsilon,a)}(a)) \subset \Omega$ であり，(6.1.1) 式によって

$$N_{\delta(\epsilon,a)}(a) \cap \mathcal{D}(f) \subseteq f^*(\Omega) \tag{6.1.6}$$

となり，あらゆる $a \in f^*(\Omega)$ に対してそのような $N_{\delta(\epsilon,a)}(a)$ を作り，

$$N_{\delta(\epsilon,a)}(a) = \mathcal{U}(a)$$

と表す. (ϵ は a に従属である.)

$$\Omega_1 = \bigcup_{a \in f^*(\Omega)} \mathcal{U}(a)$$

としよう．作り方によって，Ω_1 は開である．$x \in f^*(\Omega)$ ならば，$x \in \Omega_1$ である．よって，$f^*(\Omega) \subseteq \Omega_1$ となる．逆像の定義から $f^*(\Omega) \subseteq \mathcal{D}(f)$ であるので，

$$f^*(\Omega) \subseteq \Omega_1 \cap \mathcal{D}(f) \tag{6.1.7}$$

となる．一方，$x \in \Omega_1 \cap \mathcal{D}(f)$ ならば，ある $a \in f^*(\Omega)$ に対して $x \in \mathcal{U}(a)$

となり，(6.1.6) 式より，$x \in f^*(\Omega)$ である．すなわち，

$$\Omega_1 \cap \mathcal{D}(f) \subseteq f^*(\Omega) \tag{6.1.8}$$

となる．ともに (6.1.7) 式と (6.1.8) 式は，望んでいた結果である．

(b) 定理の条件が適合していると仮定する．$a \in \mathcal{D}(f)$ としよう．あらゆる $\epsilon > 0$ に対して，$N_\epsilon(f(a)) = \Omega$ が $\mathbb{E}^n$ で開集合であり，$a \in f^*(N_\epsilon(f(a)))$ である．仮定より，$f^*(N_\epsilon(f(a))) = \Omega_1 \cap \mathcal{D}(f)$ となるような開集合 $\Omega_1 \subseteq \mathbb{E}^m$ が一意に存在する．$a \in \Omega_1$ より，また，Ω_1 が開であることにより，$N_{\delta(\epsilon,a)}(a) \subseteq \Omega_1$ となるような $\delta(\epsilon, a) > 0$ が存在する．$N_{\delta(\epsilon,a)}(a) \cap \mathcal{D}(f) \subseteq \Omega_1 \cap \mathcal{D}(f) = f^*(N_\epsilon(f(a))$ より，定義 6.1.6 の条件は成り立つ．□

6.4 節のネットの定理の証明には，連続性に関する次の等価な大局的特徴づけを必要とする．

定理 (6.1.2)　$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{E}^n$ は，あらゆる閉集合 $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{E}^n$ に対して，$f^*(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{D}(f)$ となるような閉集合 $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathbb{E}^m$ が存在するとき，かつそのときに限り，$\mathcal{D}(f)$ 上で連続である．

(その結果，この特徴づけは,「開」と「閉」の交換によって，いつでも定理 6.1.1 の特徴づけから形式的に得られる.)

証明　$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ としよう．(6.1.2) 式から，

$$f^*(\mathbb{E}^n) = f^*(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c) = f^*(\mathcal{A}) \cup f^*(\mathcal{A}^c) = \mathcal{D}(f)$$

であり，

$$\mathcal{D}(f) = f^*(\mathcal{A}) \cup f^*(\mathcal{A}^c) \tag{6.1.9}$$

となる．$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \emptyset$ であるので，(6.1.3) 式から

$$\emptyset = f^*(\emptyset) = f^*(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c) = f^*(\mathcal{A}) \cap f^*(\mathcal{A}^c)$$

を得る．したがって，

$$f^*(\mathcal{A}) \cap f^*(\mathcal{A}^c) = \emptyset \tag{6.1.10}$$

となる．$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathbb{E}^n$ が，$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f) = f^*(\mathcal{A})$ であれば，

$$\mathcal{A}_1^c \cap f^*(\mathcal{A}) = \emptyset \tag{6.1.11}$$

となり，

$$\mathcal{D}(f) = (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f)) \cup (\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{D}(f)) = f^*(\mathcal{A}) \cup (\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{D}(f)) \tag{6.1.12}$$

である．(6.1.9) 式と (6.1.12) 式から

$$f^*(\mathcal{A}) \cup f^*(\mathcal{A}^c) = f^*(\mathcal{A}) \cup (\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{D}(f))$$

である．$f^*(\mathcal{A})$ は，(6.1.10) 式より $f^*(\mathcal{A}^c)$ と共通の要素を持たない．また，(6.1.11) 式より $\mathcal{A}_1^c$ と共通の要素を持たない．よって，

$$f^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f) \tag{6.1.13}$$

は，

$$f^*(\mathcal{A}^c) = \mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{D}(f) \tag{6.1.14}$$

を暗に意味する．これで，定理 6.1.2 を証明する準備ができた．

(a)$\mathcal{A}^c$ を閉集合と定義しよう．そのとき，$\mathcal{A}$ は開であり，定理 6.1.1 によって，(6.1.13) 式の $f^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f)$ であるような開集合 $\mathcal{A}_1$ が存在する．これは，(6.1.14) 式を暗に意味し，すなわち，$f^*(\mathcal{A}^c) = \mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{D}(f)$ である．ここで，$\mathcal{A}_1^c$ は閉であり，定理 6.1.1 は定理 6.1.2 を暗に意味していることがわかる．

(b)$\mathcal{A}^c$ を開集合としよう．そのとき，$\mathcal{A}$ は閉であり，定理 6.1.2 から，$f^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f)$ であるような閉集合 $\mathcal{A}_1$ が存在する．それは，$f^*(\mathcal{A}^c) = \mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{D}(f)$ を暗に意味する．ここで，$\mathcal{A}^c$ は開であり，定理 6.1.2 が定理 6.1.1 を暗に含むことがわかるであろう．□

§6.2　コンパクト集合

コンパクト集合を定義するには多くの方法がある．ここでは，ハイネ–ボレルの性質によるコンパクト性を定義するのが最も適している．

定義 (6.2.1)　ある集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^n$ は，ある添字集合 A に対して，開集合

$\{\Omega_\alpha | \alpha \in A\}$ のあらゆる集まりを考え，$\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ のような $\mathcal{S}$ となるあらゆる開被覆が，$\alpha_j \in A$ に対して，$\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_{\alpha_j}$ を持った有限部分被覆

$$\{\Omega_{\alpha_1}, \Omega_{\alpha_2}, \ldots, \Omega_{\alpha_k}\} \tag{6.2.1}$$

を含むならば，ハイネ–ボレルの性質を持つ．

定義 (6.2.2) 集合 $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}^n$ がハイネ–ボレルの性質を持つならば，コンパクトと呼ばれる．

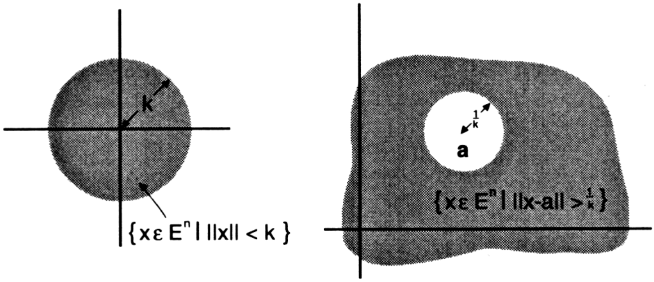
ハイネ–ボレルの性質の次に，コンパクト集合の他の性質を必要とする．それは，**有界集合** (bounded set) の概念である．

定義 (6.2.3) 集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^n$ は，すべての $x \in \mathcal{S}$ に対して，$\| x \| \leq R$ であるような $R > 0$ が存在するならば，**有界** (bounded) と呼ばれる．

定理 (6.2.1)（ハイネ–ボレルの定理） $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}^n$ は，有界で閉であるとき，かつそのときに限り，コンパクトである．

証明 (a)$\mathcal{K}$ がハイネ–ボレルの性質を持つと仮定しよう．明らかに，$\{N_k(0) | k = 1, 2, 3, \ldots\}$ は，$\mathcal{K}$ の開被覆である．有限の部分被覆 $\{N_{k_1}(0), N_{k_2}(0), \ldots, N_{k_j}(0)\}$ が存在する．$k_0 = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_j\}$ としよう．そのとき，$\mathcal{K} \subseteq N_{k_0}(0) = \{x \in \mathbb{E}^n | \, \| x \| < k_0\}$ であり，$\mathcal{K}$ は有界である．(図 6.2.1(a) も参照.)

$\mathcal{K}$ が閉でない，すなわち，$\mathcal{K}$ に含まれない $\mathcal{K}$ の集積点 a が存在するとしよう．そのとき，$\Omega_k = \{x \in \mathbb{E}^n | \, \| x - a \| > \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3 \ldots\}$ を持った $\{\Omega_k | k = 1, 2, \ldots\}$ は，$\mathcal{K}$ の開被覆である．仮定より，有限の部分被覆 $\{\Omega_k | k = k_1, k_2, \ldots, k_j\}$ は，存在するだろう．$k_0 = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_j\}$ ならば，$\mathcal{K} \subseteq \Omega_{k_0}$ であり，$\{x \in \mathbb{E}^n | \, \| x - a \| \leq \frac{1}{k_0}\}$ は $\mathcal{K}$ からの点を含まない．すなわち，a は $\mathcal{K}$ の集積点ではない．よって，$\mathcal{K}$ はすべてのその集積点



(a)　　(b)

図 6.2.1　ハイネ–ボレルの定理の証明の例示

を含み，ゆえに閉である．(図 6.2.1(b) も参照.)

(b)$\mathcal{K}$ が有界で閉であると仮定しよう．有界なので，それは，ある $s>0$ に対して辺長 s の閉じた n 次元立方体 $\mathcal{W}$ 内に含まれている．$\Omega=\{\Omega_\alpha|\alpha\in A\}$ が $\mathcal{K}$ の開被覆であるならば，$\{\Omega,\mathcal{K}^c\}$ は $\mathcal{W}$ の開被覆である（なぜならば，$\mathcal{K}$ が閉であるので，$\mathcal{K}^c$ は開であり，$\{\Omega,\mathcal{K}^c\}$ は全空間を覆うからである）．$\mathcal{K}$ がハイネ–ボレルの性質を持つことを示すため，$\mathcal{W}$ がそれを持つことだけを示せばよい．そうでないとしよう．$\mathcal{W}$ を 2^n 個の辺長 $s/2$ を持った合同部分立方体に分割しよう．少なくとも 1 つがハイネ–ボレルの性質を持たないとしよう．それを $\mathcal{W}_1$ とする．$\mathcal{W}_1$ を 2^n 個の辺長 $s/4$ を持った合同部分立方体に分割し，少なくとも 1 つがハイネ–ボレルの性質を持たないとする．それを $\mathcal{W}_2$ としよう．この過程を続け，辺長 $s/2^k$ を持った $\mathcal{W}_k$ の入れ子の閉立方体の列 $\mathcal{W}\supset\mathcal{W}_1\supset\mathcal{W}_2\supset\mathcal{W}_3\supset\ldots$, に達する．これは，カントールの交わりの定理[1]により，一意の点 $p\in\mathcal{W}$ を定義している．$\{\Omega,\mathcal{K}^c)$ が $\mathcal{W}$ の開被覆であるので，ある $\alpha_0\in A$ に対して $p\in\Omega_{\alpha_0}$ あるいは $p\in\mathcal{K}^c$ である．いずれの場合でも，$N_\delta(p)\subseteq\Omega_{\alpha_0}$ あるいは $N_\delta(p)\subseteq\mathcal{K}^c$ であるような $\delta>0$ が存在する．しかし，列 $\{\mathcal{W}_k\}$ からのすべての立方体は，ある添字から，$N_\delta(p)\subseteq\Omega_{\alpha_0}$，あるいは，$N_\delta(p)\subseteq\mathcal{K}^c$ に存在する．これは，それらがハイネ–ボレルの性質をまったく持たないという仮定に反する．　□

[1]　[訳註] 付録 A.2.6 を参照.

コンパクト性が連続変換の下で不変であることを示すことは，比較的簡単な問題である．

定理 (6.2.2) $f:\mathcal{K}\to\mathbb{E}^n$ が連続であり，$\mathcal{K}$ がコンパクトであるならば，$f_*(\mathcal{K})$ はコンパクトである．

証明 $\{\Omega_\alpha|\alpha\in A\}$ を $f_*(\mathcal{K})$ の開被覆を表すとしよう．f が連続なので，$f^*(\Omega_\alpha)=\Omega_{1\alpha}\cap\mathcal{K}$ のような開集合 $\Omega_{1\alpha}$（ただし，$\alpha\in A$）が存在することが定理 6.1.1 からわかる．$x\in\mathcal{K}$ であれば，ある $\alpha\in A$ に対して，$f(x)\in\Omega_\alpha$ となる．したがって，$x\in f^*(\Omega_\alpha)$．よって，$\{f^*(\Omega_\alpha)|\alpha\in A\}$ は $\mathcal{K}$ の開被覆である．$\mathcal{K}$ がコンパクトであるので，$\{\Omega_{1\alpha_1},\Omega_{1\alpha_2},\ldots\Omega_{1\alpha_j}\}$ は，$\mathcal{K}$ を覆うであろう．任意の $f(x)\in f_*(\mathcal{K})$ に対して，ある $i\in\{1,2,3,\ldots,j\}$ が対応し，$x\in\Omega_{1\alpha_i}$ となるので，$f(x)\in\Omega_{\alpha_i}$ である．よって，$\{\Omega_{\alpha_1},\Omega_{\alpha_2},\ldots,\Omega_{\alpha_j}\}$ は，$f_*(\mathcal{K})$ を覆い，$f_*(\mathcal{K})$ はコンパクトであることがわかる． □

定理 6.2.2 に対する系 $f:\mathcal{I}\to\mathbb{E}^n$ が連続であれば，$f_*(\mathcal{I})$ はコンパクトである．

証明 $\mathcal{I}$ は有界で閉であり，したがって，定理 6.2.1 より，コンパクトである． □

次の結果は 6.7 節と 8 章において必要とされる．

命題 (6.2.1) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{I}$ においていたるところ稠密であり，$\mathcal{M}$ はコンパクトであり，$g:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ が一様連続であれば，$\mathcal{I}$ への g の連続拡張が一意に存在する．すなわち，すべての $t\in\mathcal{D}$ に対して，$f(t)=g(t)$ であるような連続関数 $f:\mathcal{I}\to\mathcal{M}$ が一意に存在する．

証明 $\overline{\mathcal{D}}=\mathcal{I}$ なので，各 $t\in\mathcal{I}$ に対して，列 $\{t_n\}\to t, t_n\in\mathcal{D}$ とすることができ，$\{g(t_n)\}$ では，t_n に独立した t_m をとり，ある $\rho>0$ に対して $|t_n-t_m|<\rho$ となるようなコーシー列 $\| g(t_n)-g(t_m)\|<\epsilon/3$ が存在するこ

とが，$\mathcal{D}$ 上の g の一様連続性からわかる．ある $N(\epsilon)$ に対して $m,n > N(\epsilon)$ の場合である．したがって，$\lim_{n\to\infty} g(t_n)$ が存在し，また，

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t_n), t \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{D}$$

を定義すると（この定義は t に注意した列の選択によらない），

$$f(t) = g(t), t \in \mathcal{D}$$

となる．この関数 f は，$\mathcal{I}$ 上で一様連続である．$t', t'' \in \mathcal{I}$ としよう．ここで，一般性を失うことなく，$|t' - t''| < \rho$ であるような $t' < t''$ を仮定しよう．また，$t'_n, t''_n \in \mathcal{D}$ を持つ列 $\{t'_n\} \searrow t', \{t''_n\} \nearrow t''$ を取り上げる．そのとき，

$$\| f(t') - f(t'') \| \leq \| f(t') - f(t'_n) \| + \| f(t'_n) - f(t''_m) \| + \| f(t''_m) - f(t'') \|$$

となる．作り方によって，第 3 項を $\epsilon/3$ より小さくすると，$|t'_n - t''_m| < \rho$ となる．$\{f(t'_n)\} \to f(t')$ と $\{f(t''_n)\} \to f(t'')$ であるので，最初と最後の項が各々 $\epsilon/3$ より小さい大きさであるように m, n を選ぶと，すべての $|t' - t''| < \rho$ に対して，$\| f(t') - f(t'') \| < \epsilon$ となる．すなわち，f は，$\mathcal{I}$ 上で一様連続である．さらに，$\mathcal{M}$ がコンパクトであるので，すべての $t \in \mathcal{I}$ に対して，$f(t) \in \mathcal{M}$ である．この関数 f は一意である．なぜなら，$\mathcal{D}$ 上で消える連続関数は，$\mathcal{I}$ で唯一 0 である．すべての $t \in \mathcal{D}$ と $t_0 \in \mathcal{I}$ に対して，$h(t) = 0$ であるならば，$t_n \in \mathcal{D}$ を持った任意の列 $\{t_n\} \to t_0$ に対して，$h(t_n) = 0$ であり，よって，$h(t_0) = \lim_{n\to\infty} h(t_n) = 0$ を得る．□

次の結果は 6.9 節，6.10 節，そして第 8 章において必要とされる．

命題 (6.2.2)　コンパクト集合 $\mathcal{K}$ において，$\mathcal{D}$ が稠密であり，$\mathcal{D}$ がコンパクトであるならば，$\mathcal{D} = \mathcal{K}$ である．

証明　$\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{K}$ と $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ より明らかである．□

§6.3　連結集合

ある集合が，つながっていない空でない2集合に分割できないとき,「つながっている (hang together)」（あるいは,「連結している (connect)」）と考える．より厳密に定義すると，次のようになる．

定義 (6.3)　集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{E}^n$ は,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset, \mathcal{B} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$
$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{S}) = \mathcal{S}$$
$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{S}) = \emptyset$$

であるような2つの開集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}^n$ を見つけられないならば，**連結している**．そのような2つの集合があるならば，それらを $\mathcal{S}$ の**不連結** (disconnection) であり，$\mathcal{S}$ が**連結していない** (disconnect) という．

y 軸上の閉区間 $[-1,1]$ のすべての点と，点 $(1,1), \left(\frac{1}{2},-1\right), \left(\frac{1}{3},1\right), \left(\frac{1}{4},-1\right), \left(\frac{1}{5},1\right)\ldots$ をつなぐ多角線よりなる図 6.3.1 の集合は，連結している．しかし，図 6.3.2 における集合 $S = [-1,0) \cup (0,1]$ は，連結していない．

連結性は，連続変換の下で不変である．

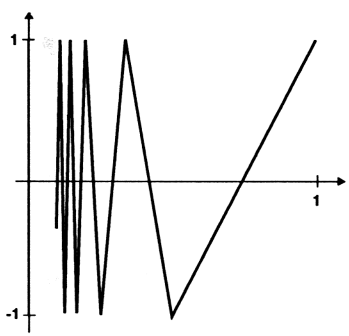


図 6.3.1　連結集合の例

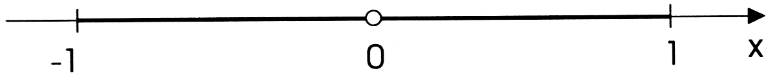


図 6.3.2　不連結集合の例

定理 (6.3.1)　$\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{E}^m$ が連結であり，$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{E}^n$ が連続であるならば，$f_*(\mathcal{D}(f))$ は連結している．

証明　（背理法による．）$f_*(\mathcal{D}(f))$ が連結していないとする．そのとき，

$$\mathcal{A} \cap f_*(\mathcal{D}(f)) \neq \emptyset, \mathcal{B} \cap f_*(\mathcal{D}(f)) \neq \emptyset \tag{6.3.1}$$

$$[\mathcal{A} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] \cup [\mathcal{B} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] = f_*(\mathcal{D}(f)) \tag{6.3.2}$$

$$[\mathcal{A} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] \cap [\mathcal{B} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] = \emptyset \tag{6.3.3}$$

となるような不連結 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が存在する．f が連続であるので，定理 6.1.1 より，

$$f^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f), f^*(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}(f) \tag{6.3.4}$$

であるような 2 つの開集合 $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$ が存在する．$\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$ がこの仮定に反する $\mathcal{D}(f)$ の不連結であることを示そう．(6.3.2) 式から，

$$\begin{aligned} f^* f_*(\mathcal{D}(f)) &= f^*(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{D}(f) = f^*[\mathcal{A} \cap f_*(\mathcal{D}(f)) \cup \mathcal{B} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] \\ &= f^*[\mathcal{A} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] \cup f^*[\mathcal{B} \cap f_*(\mathcal{D}(f))] = f^*(\mathcal{A}) \cup f^*(\mathcal{B}) \\ &= (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f)) \cup (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}(f)) \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

である．(6.3.1) 式と (6.1.4) 式から，

$$f^*(\mathcal{A}) \neq \emptyset, f^*(\mathcal{B}) \neq \emptyset$$

となる．したがって，(6.3.4) 式から，

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f) \neq \emptyset, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}(f) \neq \emptyset \tag{6.3.6}$$

を得る．最後に，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap f_*(\mathcal{D}(f)) = \emptyset$ より，

$$(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(f)) \cap (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}(f)) = f^*(\mathcal{A}) \cap f^*(\mathcal{B}) = \emptyset \tag{6.3.7}$$

となる．また，(6.3.5) 式と (6.3.6) 式と (6.3.7) 式は，$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ が $\mathcal{D}(f)$ の不連結のとき成り立つ．$\mathcal{D}(f)$ は，仮定から連結している． □

$\mathbb{R}$ の連結した部分集合だけが区間である．

定理 (6.3.2) $\mathbb{R}$ の部分集合は，1 区間であるとき，かつそのときに限り，連結である．

証明 (a) 1 区間は連結している．1 区間 $\mathcal{I}$ は次の性質を持つ．$a < b$ となる離れた 2 点 $a, b \in \mathcal{I}$ において，$[a, b] \subset \mathcal{I}$ である．(空集合 —— $\mathbb{R}$ の部分集合 —— と 1 点のみを含む集合は，明らかに $\mathbb{R}$ の連結部分集合である)．$\mathcal{I}$ が不連結であるとしよう．すなわち，$\mathcal{S}$ の代わりに $\mathcal{I}$ を持った定義 6.3 の 3 条件を満たす 2 つの部分開集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ が存在する．$a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{I}$，$b \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ という一般性を失わない仮定である．

$$\mathcal{T} = \{t \in [a, b] |\ t \in \mathcal{A} \cap \mathcal{I}\}$$

としよう．$a \in \mathcal{T}$ なので，$\mathcal{T} \neq \emptyset$．$\mathcal{T}$ が上に有界であり，少なくとも上限

$$t_0 = \sup \mathcal{T} \in [a, b] \tag{6.3.8}$$

を持つ．$t_0 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ としよう．$\mathcal{B}$ は開であるので，ある $\delta > 0$ に対して，$(t_0 - \delta, t_0] \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ である（$\mathcal{I}$ は，a と b 間のすべての点を含んでいる!)．(6.3.8) 式により，$t_0 - \delta < t \leq t_0$ となる $t \in \mathcal{A} \cap \mathcal{I}$，$a \leq t \leq b$ が存在する．しかし，これは，$(\mathcal{A} \cap \mathcal{I}) \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{I}) = \emptyset$ なのであり得ない．したがって，$t_0 \notin \mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ となる．今，$t_0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{I}$ としよう．$\mathcal{A}$ が開であり，$t_0 < b$ なので，ある $\delta > 0$ に対して，$[t_0, t_0 + \delta) \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{I}$ となる．これは，(6.3.8) 式の t_0 の定義に反する．よって，$a, b \in \mathcal{I}$，$a < t_0 < b$ と $t_0 \notin (\mathcal{A} \cap \mathcal{I}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{I}) = \mathcal{I}$ という結論に達する．ゆえに，$\mathcal{I}$ は一区間とならず，仮定に反する（図 **6.3.3** を参照）．

(b)$\mathbb{R}$ の連結部分集合が一区間である．$\mathcal{I}$ が区間でないが，連結であるとする．そのとき，$a < b$ となる 2 点 $a, b \in \mathcal{I}$ と，$a < z < b$ であるような点

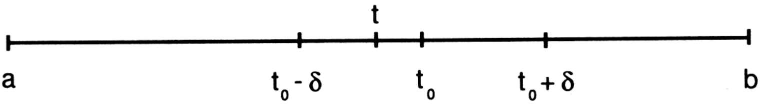


図 6.3.3 定理 6.3.2 の証明のための例示

$z \notin \mathcal{I}$ が存在する．

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} | x < z\}$$
$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} | x > z\}$$

としよう．$a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ なので，どちらの集合も空でない．これは，$\mathcal{I}$ の不連結を示した仮定に反する． □

定理 6.3.1，6.3.2 に関する系 $f : \mathcal{I} \to \mathbb{E}^n$ が連続であるならば，$f_*(\mathcal{I})$ は連結である．$n = 1$ であれば，$f_*(\mathcal{I})$ は閉区間である．

連結集合の次の性質は，6.7 節において必要とされる．

命題 (6.3) $\mathcal{C}$ が閉であり，連結であるならば，任意の 2 点 $x', x'' \in \mathcal{C}$ と任意の $\eta > 0$ に対して，x' から x'' への η 鎖 (η-chain) が存在する．すなわち，これは，$\| x_{i+1} - x_i \| < \eta$（ただし，$i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$）となる $x' = x_1$，$x'' = x_n$ を持った有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{C}$ である．

証明 $\eta > 0$ を選び，

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{C} | x' \text{ から } x \text{ への } \eta \text{ 鎖が存在する }\}$$

としよう．$\mathcal{A} = \mathcal{C}$ を示したいわけである．これを背理法により証明する．$\Omega = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} N_\eta(a)$ としよう．$x \in \mathcal{C} \cap \Omega$ であるならば，ある $a \in \mathcal{A}$ に対して，$x \in N_\eta(a) \cap \mathcal{C}$ となる．したがって，x' から x まで a に沿って，η 鎖が存在する．よって，$x \in \mathcal{A}$，すなわち，$\mathcal{C} \cap \Omega \subseteq \mathcal{A}$ である．逆に，$x \in \mathcal{A}$ であれば，$x \in N_\eta(a) \subset \Omega$ であり，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ なので，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \cap \Omega$ を得る．したがっ

て，$\mathcal{A}=\mathcal{C}\cap\Omega$ となる．明らかに，$x'\in\mathcal{A}$ なので，$\mathcal{C}\cap\Omega\neq\emptyset$ である．x を $\mathcal{A}$ の集積点としよう．$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$ なので，x は，$\mathcal{C}$ の集積点でもあり，$\mathcal{C}$ が閉であるので，$x\in\mathcal{C}$ である．$N'_\eta(x)$ は $\mathcal{A}$ からの点を含んでいるので，それを a とし，a が $x\in\mathcal{C}$ の η 内にあるので，x' から x まで a による η 鎖が存在する．したがって，$x\in\mathcal{A}$ である．これは，$\mathcal{A}$ が閉であり，A^c が開であることを意味する．$\mathcal{A}=\mathcal{C}\cap\Omega$ なので，$\mathcal{C}\cap\Omega\cap\mathcal{A}^c=\emptyset$ である．$\mathcal{A}^c\cap\mathcal{C}\neq\emptyset$ であれば，Ω と A^c が $\mathcal{C}$ の不連結である．なぜならば，

$$A^c\cap\mathcal{C}\neq\emptyset,\Omega\cap\mathcal{C}\neq\emptyset$$

$$(A^c\cap\mathcal{C})\cup(\Omega\cap\mathcal{C})=\mathcal{C}$$

$$(A^c\cap\mathcal{C})\cap(\Omega\cap\mathcal{C})=\emptyset$$

であるからである．これは，矛盾である．したがって，$\mathcal{A}^c\cap\mathcal{C}=\emptyset$ であり，すなわち，$\mathcal{C}$ は，$\mathcal{A}$ に含まれない点を持たない．$\mathcal{A}$ の定義によって，$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$ なので，$\mathcal{A}=\mathcal{C}$ となる．これは，x' から $\mathcal{C}$ のすべての点への η 鎖が存在し，また，x' や可能な他の点による $\mathcal{C}$ の任意の 2 点間に η 鎖が存在することを意味する．□

（注意 : 命題 6.3 は，$\mathcal{C}$ が閉であるという仮定が除かれても，真となる．読者には，これらの弱い条件の下での証明を残しておく.）

§6.4　ネットの定理の証明

解決に必要な道具が整ったので，1.3 節に記したネットの定理の証明を与えよう．

定理 (6.4)（ネット）　任意の全単射 $f:\mathcal{I}\leftrightarrow\mathcal{Q}$（あるいは $\mathcal{W}$，あるいは $\mathcal{T}$）は，必ず不連続である．

証明　f が，$\mathcal{Q}$（あるいは $\mathcal{W}$，あるいは $\mathcal{T}$）への全単射とすると，その逆 $f^{-1}:\mathcal{Q}$（あるいは $\mathcal{W}$，あるいは $\mathcal{T}$）$\leftrightarrow\mathcal{I}$ が存在する．$g\triangleq f^{-1}$ としよう．

また，$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ を閉集合としよう．そのとき，$\mathcal{A} \cap \mathcal{I}$ は有界であり，閉であり，したがってコンパクトである．定理 6.2.2 より，$f_*(\mathcal{A} \cap \mathcal{I})$ はコンパクトであり，したがって閉である．$f_*(\mathcal{A} \cap \mathcal{I}) = \mathcal{A}_1$ としよう．$f_*(\mathcal{A} \cap \mathcal{I}) = g^*(\mathcal{A})$ なので，$g^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1$ となり，また，$\mathcal{A}_1 \subseteq f_*(\mathcal{I}) = \mathcal{D}(g)$ なので，$g^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{D}(g)$ と書くことができ，定理 6.1.2 より，$g = f^{-1}$ が連続であることがわかる．

f^{-1} は，連続であるので，定理 6.3.1 によって，連結集合から連結集合へ写像する．開区間 $(0,1)$ から点 t_0 を取り除き，その像 $f(t_0)$ を $\mathcal{Q}$（あるいは $\mathcal{W}$，あるいは $\mathcal{T}$）から取り除く．$\mathcal{Q} \backslash f(t_0)$（あるいは $\mathcal{W} \backslash f(t_0)$，あるいは $\mathcal{T} \backslash f(t_0)$）は，連結であるが，$\mathcal{I} \backslash t_0 = [0, t_0) \cup (t_0, 1]$ は連結でない．また，連続関数 f^{-1} は連結集合から不連結集合への写像であることになる．これは，定理 6.3.1 に矛盾し，f が連続でありえないことがわかる．　□

明らかに，この証明は，$\mathcal{Q}$，$\mathcal{W}$，$\mathcal{T}$ に適用できるばかりでなく，少なくとも 2 点を含み，1 点の除去によって不連結にならない任意のコンパクト連結集合に適用できる．(より一般的な場合は，Greenberg[1] を参照)

§6.5　局所連結集合

定理 6.2.2 に関する系と定理 6.3.1，6.3.2 に関する系からわかるように，$\mathcal{I}$ の連続像である集合に対して，それは，コンパクトであり，連結である．これは，しかしながら十分でない．たとえば，コンパクトであり，連結である図 6.3.1 の集合は，$\mathcal{I}$ の連続像として得ることができない．1913 年にハンス・ハーンは，ウィーンで開催されたドイツの科学者と物理学者の会議において，集合が $\mathcal{I}$ の連続像であるために，コンパクト性と連結性に加えて満足すべき第 3 の条件を見つけ，これらの 3 つの条件がさらに必要を満たすことを発表した．彼の講演は，この条件の必要性だけを扱ったものであった (Hahn[2])．彼は，1914 年にウィーンの帝国王立科学協会 (Imperial and Royal Academy of Science) の会議録に十分性に関係する部分を発表した (Hahn[3])．問題の性質は，ハーンが述べた「局所連結（local connectedness，あるいは，Zusammenhang im Kleinen）」にある．

定義 (6.5) 集合 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{E}^n$ は，あらゆる点 $p \in \mathcal{M}$ とあらゆる $\epsilon > 0$ に対して，ある $\eta(\epsilon, p) > 0$ が存在し，あらゆる点 $p' \in N_{\eta(\epsilon,p)}(p) \cap \mathcal{M}$ に対して，p と p' を含むコンパクト連結部分集合 $\mathcal{M}' \subseteq N_\epsilon(p)$ が存在するならば，局所連結 (locally connected) である．

他の同等な定義は，文献（Hausdorff[1], pp.177, 179，または Willard[1], p.199）に見ることができる．可能な限り混乱を避けるため，ハーンが定義したように，ウィラードが，$\mathcal{M}$ のある点で「微小連結 (connected im kleinen)」を定義したことをあげておこう．それから，ウィラードは，彼の定義 (Willard[1], p.199) によって，ある集合が，その中の任意の 1 点において「微小連結」であるならば，すなわち，ハーンの定義によって，「微小で (im kleinen)」連結しているならば，局所連結されていることを示そうとした．(ハーンは集合の性質と同様に点の性質に対しても同じ用語を使ったが，ウィラードは，点の性質に対して「微小連結」を使い，集合の性質に対して「局所連結」を使っていることが異なる.)

局所連結集合は，連結されている必要はない．図 6.3.2 における集合は，局所連結されている．一方，図 6.3.1 において y 軸の垂直区間 $[-1, 1]$ の任意の点で局所連結されていないような連結集合のように，連結集合は，局所連結されている必要はない．

局所連結性は，連続変換の下で不変ではない．局所連結集合を連続的に局所連結でない集合に写像することは可能である．たとえば，図 6.3.2 における集合を例にとって，その集合から図 6.3.1 における集合への次の写像を定義しよう．区間 $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$ を線形に垂直区間 $[-1, 1]$ へ写像し（点 $(-1, 0)$ を点 $(0, -1)$ へ写像する），区間 $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ を線形に垂直区間 $(0, 1]$ へ写像し（点 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ を点 $(0, 1)$ へ写像する），さらに，区間 $(0, 1]$ を（垂直投影によって）全単射的，かつ連続的に，図 6.3.1 における集合のジグザグ部分へ写像する。この写像は連続である．

局所連結性は連続変換の下で不変ではないが，コンパクト性と関連した局所連結性は，不変である．コンパクト局所連結集合の連続像は，コンパクト局所連結である (Willard[1], p.203)．ここでは，このような一般的性質の結果を必要としない．次のことを証明する目的には，これで十分である．

定理 (6.5)　$f : \mathcal{I} \to \mathbb{E}^n$ が連続であれば，$f_*(\mathcal{I})$ は局所連結である．($\mathcal{I}$ がコンパクトであれば，定理 6.2.2 によってそれもコンパクトである．)

証明　(背理法による．) $f_*(\mathcal{I}) = \mathcal{M}$ が局所連結でないと仮定しよう．点 $p \in \mathcal{M}$ と $\epsilon > 0$ が存在し，すべての $\eta > 0$ に対して，点 $p' \in N_\eta(p) \cap \mathcal{M}$ が存在する．ここで，p と p' を含む $\mathcal{M}$ のあらゆるコンパクト連結部分集合が $N_\epsilon(p)$ の外側に点を持つようにする．

$\eta_j > 0$ を持った列 $\{\eta_j\}$ と $\lim_{j\to\infty} \eta_j = 0$ を考えよう．そのとき，各 η_j に対して，必要とされる性質を持たない点 $p'_j \in N_{\eta_j(p)} \cap \mathcal{M}$ が存在する．作り方によって，$\{p'_j\} \to p$ となる．$\mathcal{M} = f_*(\mathcal{I})$ なので，各 j に対して，$f(t'_j) = p'_j$ であるような少なくとも 1 つの $t'_j \in \mathcal{I}$ を持つことがわかる．$\mathcal{I}$ がコンパクトであるので，1 点に収束する部分列 $\{t'_{n_j}\} \to t' \in \mathcal{I}$ が存在する．$f(t'_{n_j}) = p'_{n_j}$ であり，f が連続であるので，$f(t') = p$ となる．($t'_{n_j} < t'$ であれば閉区間 $[t'_{n_j}, t']$ であり，$t' < t'_{n_j}$ であれば閉区間 $[t', t'_{n_j}]$ である) 線分 $< t'_{n_j}, t' >$ は，定理 6.2.2，6.3.1，6.3.2 に関する系によって，p'_{n_j} と同様 p を含むコンパクト連結部分集合 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ に写像される．f が連続なので，すべての $t \in N_\delta(t') \cap \mathcal{I}$ に対して，

$$\| f(t) - f(t') \| < \epsilon$$

であるような $\delta > 0$ が存在する．$\{t'_{n_j}\} \to t'$ となるので，すべての $j > j_0$ に対して，$t'_{n_j} \in N_\delta(t') \cap \mathcal{I}$ であるような j_0 が存在する．よって，すべての $j > j_0$ に対して，$f_*(< t'_{n_j}, t' >) \subset N_\epsilon(p)$ である．すなわち，$N_\epsilon(p)$ 内にあり，p'_{n_j} と同様 p を含む M のコンパクト連結部分集合 M' が存在する．これは，p'_{n_j} がその性質を持たないという仮定に反する．□

§6.6　ハウスドルフの定理

定理 6.2.2, 6.3.1, 6.3.2 に関する系と定理 6.5 より，$\mathcal{I}$ (あるいは任意の閉線分) の連続像がコンパクト，連結，局所連結であることがわかる．ハーンは，1913 年これらの条件が十分であることも証明した．彼の証明は，苦

労をしたにもかかわらず，特にわかりやすいものではなかった．事実，それは35ページにも及んだ．1927年，フェリックス・ハウスドルフの『集合論(*Mengenlehre*)』の第2版が出版された．これは，各コンパクト集合がカントール集合の連続像であることを主張した定理を含んでいる (Hausdorff[1], pp.154, 226)．同年，アレクサンドロフ (Alexandroff[1]) が同じ結果を発表した．1928年，ハーンは，この定理を使って，彼のもともとの証明とステファン・マズルキーウィッチによる証明ばかりでなく，ハーン (Hahn[7], p.218) による他のすべての未発表の証明にも，簡単さとわかりやすさの点で勝る証明を与えた．6.8節にハーンの第2の証明を示す．まず，ハウスドルフの定理を証明し，付加的に関係するコンパクト，連結，局所連結集合のいくつかの性質を示す．

定理 (6.6)（ハウスドルフ） あらゆるコンパクト集合は，カントール集合の連続像である．

証明 （構成法による.）

$\mathcal{K}$ をコンパクト集合としよう．それが N_1 近傍によって覆われている．$\mathcal{K}$ がハイネ–ボレルの性質を持つので，有限の部分被覆

$$N_1(x_{i_1}), i_1 = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n_1} - 1$$

が存在する（ここで，一般性を失うことなしに，この部分被覆は，ある整数 n_1 に対して 2^{n_1} 個の要素を持つ —— もし必要であれば，いくつかを枚挙することによって何度も，と仮定しよう）．

$$\mathcal{K}_{i_1} = \overline{N}_1(x_{i_1}) \cap \mathcal{K}$$

としよう．ここで，$\overline{N}_1$ は，N_1 の閉包，すなわち，$\overline{N}_1(x_{i_1}) = \{x \in \mathbb{E}^n | \| x - x_{i_1} \| \leq 1\}$ とする．$\bigcup_{i_1} \mathcal{K}_{i_1} = \mathcal{K}$ を得る．次に，各 $\mathcal{K}_{i_1}$ を $N_{1/2}$ 近傍によって覆い，有限の部分被覆 $N_{1/2}(x_{i_1 i_2})$（ただし，$i_2 = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n_2} - 1$）を取り上げる（ここで，一般性を失うことなく，各部分被覆は同じ個数の 2^{n_2} 要素を持つとしよう）．

$$\mathcal{K}_{i_1 i_2} = \overline{N}_{1/2}(x_{i_1 i_2}) \cap \mathcal{K}_{i_1}$$

とする．$\bigcup_{i_2} \mathcal{K}_{i_1 i_2} = \mathcal{K}_{i_1}$ となる．この方法を，$N_{1/4}$ 近傍，$N_{1/8}$ 近傍などなどと続け，コンパクト集合の縮小列

$$\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_{i_1} \supseteq \mathcal{K}_{i_1 i_2} \supseteq \mathcal{K}_{i_1 i_2 i_3} \supseteq \ldots \tag{6.6.1}$$

を得る．ここで，$\mathcal{K}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k}$ は，$1/2^{k-1}$ 近傍の閉包に含まれている．

任意の $t \in \Gamma$ を，

$$t = 0_{\dot{3}}(2b_1)(2b_2)\ldots(2b_{n_1})(2b_{n_1+1})(2b_{n_1+2})\ldots(2b_{n_1+n_2})(2b_{n_1+n_2+1})\ldots$$

として書くことができる．ここで，$b_j = 0$ または 1 であり，無限に多く続く b_j が 0 となるであろう．また，写像 $f : \Gamma \to \mathcal{K}$ を

$$f(t) = \mathcal{K}_{i_1} \cap \mathcal{K}_{i_1 i_2} \cap \mathcal{K}_{i_1 i_2 i_3} \cap \mathcal{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \cap \ldots \tag{6.6.2}$$

によって定義する．ここで，$i_1 = (b_1 \ldots b_{n_1})_2$，$i_2 = (b_{n_1+1} \ldots b_{n_1+n_2})_2$，$i_3 = (b_{n_1+n_2+1} \ldots b_{n_1+n_2+n_3})_2, \ldots - (b_{n_1+\cdots+n_k+1} \ldots b_{n_1+\cdots+n_{k+1}})_2$ は，数 i_{k+1} の 2 進表現である．カントールの交わりの定理によって，(6.6.2) 式が，各 $t \in \Gamma$ で $\mathcal{K}$ の一意の点となる．

この写像は全射である．なぜならば，$\mathcal{K}$ の各点は，2 進数列に対応し，順に Γ の点に対応するような少なくとも 1 つの縮小列 (6.6.1) 式に存在するからである．

写像はまた連続である．$|t' - t''| < 1/3^{n+1}$ であれば，

$$\begin{aligned} t' &= 0_{\dot{3}}(2b_1)(2b_2)\ldots(2b_n)(2b_{n+1})(2b_{n+2})\ldots \\ t'' &= 0_{\dot{3}}(2b_1)(2b_2)\ldots(2b_n)(2\beta_{n+1})(2\beta_{n+2})\ldots \end{aligned}$$

である．もし，$n_1 + n_2 + \cdots + n_j \le n < n_1 + n_2 + \cdots + n_j + n_{j+1}$ であれば，$f(t'), f(t'') \in \mathcal{K}_{i_1 i_2 \ldots i_j} \subseteq \overline{N}_{1/2^{j-1}}(x_{i_1 \ldots i_j})$，すなわち，$\| f(t') - f(t'') \| < 1/2^{j-2}$ である．□

ハウスドルフの定理は，Γ から $\mathcal{Q}$ または $\mathcal{W}$ への連続写像 (6.1.2) 式または (6.1.3) 式の直接的な一般化である．そこで，Γ^c を作る開区間の始点と終点の

像をつなぐことによって，全区間 $\mathcal{I}$ への連続な写像に拡張することができる．このことは，目的の集合が凸であるので，可能であった．必要なことは，$\mathcal{K}$ が凸でないときでさえ，これらの点が $\mathcal{K}$ に含まれる連続道 (continuous path) によって連結されているという保証である．$\mathcal{K}$ は，コンパクト，連結，局所連結であるとき，**一様に道状連結されており** (uniformly pathwise connected)[2]，そのような作り方が可能である．ハーン (Harn[3]) は，このことを示したのであり，次節において彼の証明を示そう．(偶然に，この結果は，集合が線分の連続像であるためのコンパクト性，連結性，局所連結性の十分条件のハーンの第 2 の証明と同様に，彼の第 1 の証明を必要とする.)

§6.7 道状連結性

定義 (6.7) 集合 $\mathcal{A}$ は，任意の 2 点 $p', p'' \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ に含まれる連続道によってつなぐことができるならば，道状連結していると呼ばれる．すなわち，$f(0) = p'$，$f(1) = p''$ であるような連続関数 $f : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ が存在する．

命題 (6.7) $\mathcal{M}$ がコンパクト，連結，局所連結であるならば，すべての $\epsilon > 0$ に対して，次の $\eta(\epsilon) > 0$ が存在する．2 点 $p', p'' \in \mathcal{M}$ がお互いの $\eta(\epsilon)$ 内にあり，すなわち，$\| p' - p'' \| < \eta(\epsilon)$ となるとき，p', p'' を含み，p'' と同様 p' の ϵ 近傍，すなわち，$p', p'' \in \mathcal{M}'$，$\mathcal{M}' \subseteq N_\epsilon(p')$，$\mathcal{M}' \subseteq N_\epsilon(p'')$ にあるコンパクト連結部分集合 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ が存在する．(言い換えると，p', p'' が p', p'' に近いコンパクト連結集合によって連結されている．$p' \in \mathcal{M}'$ が p'' の ϵ 内にあり，その逆も成り立つので，$\eta \leq \epsilon$ であることに注意されたい.)

証明 (背理法による.) これが真でないとしよう．$\lim_{i \to \infty} \eta_i = 0$ となるすべての $\eta_i > 0$ (ただし，$i = 1, 2, 3, \ldots$) に対して，互いに η_i 内で対となる点 $\{p'_i, p''_i\}$，すなわち，$\| p'_i - p''_i \| < \eta_i$ が存在し，p'_i, p''_i の任意のコンパクト連結 $\mathcal{M}'_i$ が $N_\epsilon(p'_i)$ または $N_\epsilon(p''_i)$ の外側に点を持つような $\epsilon > 0$ が存在する．$\mathcal{M}$ がコンパクトであるので，$\{p'_i\}$ の部分列が，ある $p' \in \mathcal{M}$ に収束

---

2 ［訳註］これと関連した弧状連結 (arcwise connected) については，本章の問題 21 を参照．

するように $\{p'_i, p''_i\}$ の部分列が存在し，さらに，$\{p''_i\}$ の対応する部分列が，ある $p'' \in \mathcal{M}$ に収束するようにその部分列の部分列が存在する．この部分列の部分列を $\{p'_k, p''_k\}$ とする．作り方から，$\lim_{k\to\infty} p'_k = p'$, $\lim_{k\to\infty} p''_k = p''$ となる．$\| p'_k - p''_k \| < \eta_k$ と $\{\eta_k\} \to 0$ より，$p' = p'' \triangleq p$ を得る．$\mathcal{M}$ が閉であるので，$p \in \mathcal{M}$ である．$\mathcal{M}$ が局所連結であるので，任意の $\epsilon/2 > 0$ に対して，ある $\eta > 0$ が存在し，$\overline{p} \in N_\eta(p)$ のときいつでも，$p, \overline{p}$ が，p の $\epsilon/2$ 近傍にすべてあるようなコンパクト部分集合 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ によって連結されている．すべての $k > k_0$ に対して，$p'_k \in N_\eta(p), p''_k \in N_\eta(p)$ であるように十分大きな k_0 を選ぶ．そのとき，p'_k は，コンパクト部分集合 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ によって，p に連結され，また，p''_k は，コンパクト部分集合 $\mathcal{M}'' \subseteq \mathcal{M}$ によって，p に連結され，また，$\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ の両方とも p の $\epsilon/2$ 近傍にある．$\mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$ がコンパクトであり，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ が p を含むので連結であり，最後に，作り方から，$\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ が p''_k の ϵ 近傍と同様に，p'_k の ϵ 近傍にある．これは仮定に反する．　□

η は，その存在が命題 6.7 に示されているが，p に独立であり，ϵ だけに従う．そのため，コンパクト，連結，局所連結集合は，**一様局所連結である** (uniformly locally connected) という．

定理 (6.7.1)　コンパクト，連結，局所連結集合 M は，道状連結である．

注意：これは，局所連結でない図 6.3.1 の集合の場合でなく，連結でない図 6.3.2 の集合の場合でもない．また，コンパクト，道状連結集合が図 6.7.1 からわかるように，局所連結である必要がないことをみよう．ここで，あるスポークと時計回りの方向でのその近傍スポークとのなす角度は，そのスポークと反時計回りの方向でのその近傍スポークとのなす角度の半分である．

証明　命題 6.7 によって，$\mathcal{M}$ が一様局所連結である．任意の $\epsilon_k > 0$ に対して，ある $\eta_k > 0$ が存在し，お互いに η_k に含まれる任意の 2 点 $q'_k, q''_k \in \mathcal{M}$ が，q'_k の ϵ_k 近傍と q''_k の ϵ_k 近傍に含まれるコンパクト集合 $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}$ に

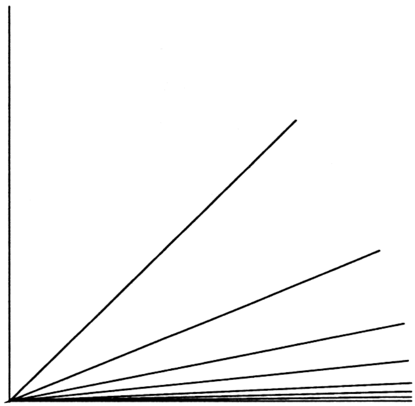


図 6.7.1 局所連結でないコンパクト，道状連結集合の例

よって連結している．$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty$ であるように，$\epsilon_k > 0$ を持った列 $\{\epsilon_k\}$ を選ぼう．命題 6.3 によって，p' から p'' への η_1 鎖が存在し，ある整数 n_1 に対して（もし必要であれば，点を常に加えたり，あるいは点を何度も数えたりする），2 つの終点を含んだこの鎖内に，$2^{n_1} + 1$ 個の点，すなわち，

$$p' = p_0^{(1)}, p_1^{(1)}, \ldots, p_{2^{n_1}}^{(1)} = p'' \tag{6.7.1}$$

が存在することを，一般性を失うことなく仮定する．命題 6.7 によって，この鎖内の各 2 隣接点は，いずれかの点の ϵ_1 近傍にあるコンパクト集合 $\mathcal{M}_i^{(1)} \subseteq \mathcal{M}$（ただし，$i = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n_1}$）によって連結している．したがって，命題 6.3 により，$\mathcal{M}_i^{(1)}$ にある (6.7.1) 式の任意の 2 隣接点間の η_2 鎖が存在する．ここで，そのような鎖の各々は，ある適当な整数 n_2 に対して，同数の $2^{n_2} + 1$ 個の点，すなわち，

$$p_i^{(1)} = p_{i.2^{n_2}}^{(2)}, p_{i.2^{n_2}+1}^{(2)}, \ldots, p_{(i+1).2^{n_2}}^{(2)} = p_{i+1}^{(1)} \tag{6.7.2}$$

（ただし，$i = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n_1} - 1$）が存在することを，一般性を失うことなく仮定している．

(6.7.2) 式における各々の 2 隣接点は，その 1 点が ϵ_2 近傍に含まれ，もう 1 点が ϵ_2 近傍に含まれるコンパクト集合 $\mathcal{M}_j^{(2)} \subseteq \mathcal{M}_i^{(1)}$ によって連結してい

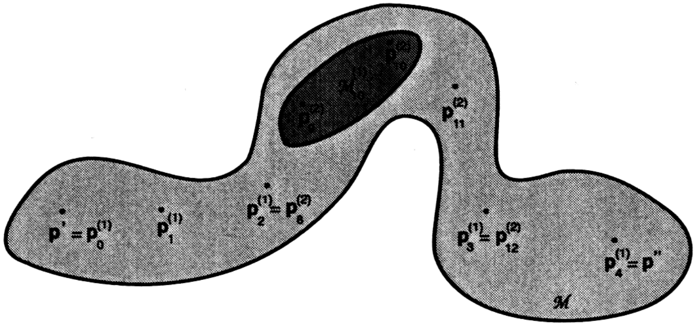


図 6.7.2　$n_1 = n_2 = 2, k = 1, 2$ に対する定理 6.7.2 の証明の例示

る．再び，命題 6.3 を使って，$\mathcal{M}_j^{(2)}$ にあり，お互いに $2^{n_3} + 1$ 個の点を持つ (6.7.2) 式の各々の 2 隣接点間の η_3 鎖を作る，などなどとする．(図 6.7.2 を参照のこと．)

k ステップ後には，鎖は，

$$p' = p_0^{(k)}, p_1^{(k)}, \dots, p_{2^{n_1+n_2+\cdots+n_k}}^{(k)} = p'' \tag{6.7.3}$$

となる．ここで，各々の 2 隣接点は，どちらか 1 点の ϵ_k 近傍にあるコンパクト集合 $\mathcal{M}_r^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_j^{(k-1)}$ によって連結している．

連続関数 $f : \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ を作るための第 1 ステップとして，

$$t_{i,k} = \frac{i}{2^{n_1+n_2+\cdots+n_k}},\ i = 0, 1, 2, \dots, 2^{n_1+n_2+\cdots+n_k}$$

の形で表現されるすべての $t \in \mathcal{I}$ に対して，関数 g を

$$g(t_{i,k}) = p_i^{(k)},\ i = 0, 1, 2, \dots, 2^{n_1+n_2+\cdots+n_k} \tag{6.7.4}$$

により定義する．作る上で，各鎖は，すべての前の鎖を含むこと，また，特に，

$$p_i^{(k-1)} = p_{i.2^{n_k}}^{(k)}$$

であることに注意されたい．(6.7.4) 式で定義した関数がその定義域

$$\mathcal{D} = \{0_{\dot{2}} b_1 b_2 b_3 \dots b_s | b_i = 0 \quad \text{または} \quad 1, s = 1, 2, 3, \dots\}$$

において一様連続であることを示し，命題 6.2.1 によって，g の定義を $\mathcal{I}$ に

拡張しよう（もし，$i = b_{n_1+\cdots+n_k} + 2b_{n_1+\cdots+n_k-1} + 4b_{n_1+\cdots+n_k-2} + \cdots + 2^{n_1+\cdots+n_k-1}b_1$ であれば，

$$0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots b_{n_1+n_2+\cdots+n_k} = \frac{i}{2^{n_1+n_2+\cdots+n_k}}$$

である）．任意の $\epsilon > 0$ と $\sum_{k=k_0}^{\infty}\epsilon_k < \frac{\epsilon}{2}$ であるような十分大きな k_0 を選ぼう．$|t'-t''| < 1/2^{n_1+\cdots+n_{k_0}} \triangleq \delta, t', t'' \in \mathcal{D}$ が，$\| g(t') - g(t'') \| < \epsilon$ という意味を含むことがわかる．δ が t に関して独立であるので，連続性は一様である．$|t'-t''| < \delta$ であれば，t', t'' は，せいぜい 2 隣接区間

$$\left[\frac{j-1}{2^{n_1+\cdots+n_{k_0}}}, \frac{j}{2^{n_1+\cdots+n_{k_0}}}\right], \quad \left[\frac{j}{2^{n_1+\cdots+n_{k_0}}}, \frac{j+1}{2^{n_1+\cdots+n_{k_0}}}\right]$$

にあることを示そう．t' が最初の区間にあり，t'' が第 2 区間にあることを一般性を失うことなく仮定する．ある r, j^* に対して，

$$g(t') = p_{j^*}^{(k_0+r)}$$

としよう．その点の履歴をたどってみよう．それは，作る上で，コンパクト集合 $\mathcal{M}_{j_0+1}^{(k_0)} \subseteq N_{\epsilon_{k_0}}(p_{j_0}^{(k_0)})$ によって連結されている 2 点 $p_{j_0}^{(k_0)}$ と $p_{j_0+1}^{(k_0)}$ の間にある（ここで，$j_0 = j-1$ である）．次に，コンパクト集合 $\mathcal{M}_{j_1+1}^{(k_0+1)} \subseteq N_{\epsilon_{k_0+1}}(p_{j_1}^{(k_0+1)})$ によって連結されている 2 点

$$p_{j_1}^{(k_0+1)}, p_{j_1+1}^{(k_0+1)} \in \mathcal{M}_{j_0+1}^{(k_0)}$$

の間にあり，また，コンパクト集合 $\mathcal{M}_{j_2+1}^{(k_0+2)} \subseteq N_{\epsilon_{k_0+2}}(p_{j_2}^{(k_0+2)})$ によって連結されている 2 点

$$p_{j_2}^{(k_0+2)}, p_{j_2+1}^{(k_0+2)} \in \mathcal{M}_{j_1+1}^{(k_0+1)}$$

の間にある，などなどである．$\| p_{j_1}^{(k_0+1)} - p_{j_0}^{(k_0)} \| < \epsilon_{k_0}$ と $\| p_{j_2}^{(k_0+2)} - p_{j_1}^{(k_0+1)} \| < \epsilon_{k_0+1}$ であり，したがって，$\| p_{j_2}^{(k_0+2)} - p_{j_0}^{(k_0)} \| < \epsilon_{k_0} + \epsilon_{k_0+1}$ と

なる．この過程を続けると，最後は，

$$p_{j^*}^{(k_0+r)} \in N_{\epsilon_{k_0}+\cdots+\epsilon_{k_0+r-1}}(p_{j_0}^{(k_0)}),$$

すなわち

$$\| g(t') - g(t_{j_0,k_0}) \| = \| p_{j^*}^{(k_0+r)} - p_{j_0}^{(k_0)} \| < \epsilon_{k_0} + \cdots + \epsilon_{k_0+r-1} < \epsilon/2$$

を得る．まったく同じように，期待される結果 $\| g(t') - g(t'') \| < \epsilon$ を得るために，

$$\| g(t'') - g(t_{j_0,k_0}) \| < \epsilon/2$$

を示すことができる．

この関数を $\mathcal{I}$ に拡張するため，$\overline{\mathcal{D}}$ を $\mathcal{D}$ の閉包とすると，$\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{I}$ であることがわかる．そのとき，命題 6.2.1 より，すべての $t \in \mathcal{D}$ に対して，$f(t) = g(t)$ であり，(6.7.4) より $f(0) = p'$, $f(1) = p''$ であるような（一意）連続関数 $f : \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ が存在する．□

定理 6.7.1 より，次のように説明できる．連結すべき点がお互いに極めて近くにあるならば，連結している道は，どちらかの点の近くに残り，近さの測度は一様である．より厳密にすると，

定理 (6.7.2)　$\mathcal{M}$ がコンパクト，連結，局所連結であるならば，すべての $\epsilon > 0$ に対して，ある $\eta > 0$（ただし，$\eta \leq \epsilon$）が存在し，$p', p'' \in \mathcal{M}$ において $\| p' - p'' \| < \eta$ が成り立つとき，$N_\epsilon(p'') \cap \mathcal{M}$ 内と同様に，$N_\epsilon(p') \cap \mathcal{M}$ 内に含まれる p' から p'' への連続道が存在する．

証明　$\epsilon > 0$ を選び，$0 < \zeta < \epsilon/2$ としよう．$\| p' - p'' \| < \eta$ が成り立つとき，p', p'' を含み，$\mathcal{M}' \subseteq N_\zeta(p'')$ と同様に $\mathcal{M}' \subseteq N_\zeta(p')$ となるコンパクト連結集合 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ が存在するので，命題 6.7 より，ある $\eta > 0$ が存在する．定理 6.7.1 の証明に用いた ϵ_k に対して，

$$\epsilon_k = \zeta/2^k$$

を選ぶことにし，$\mathcal{M}'$ 内の p' から p'' への η_1 鎖を取り上げよう．定理 6.7.1

の証明の集合 $\mathcal{M}_i^{(1)}$ に対して，$\mathcal{M}_i^{(1)} \subseteq N_{\zeta/2}(p_i^{(1)})$ であることがわかる．$p_i^{(1)} \in N_\zeta(p')$，$p_i^{(1)} \in N_\zeta(p'')$ なので，集合 $\mathcal{M}_i^{(1)}$ が p'' と同様に p' の $(\zeta + \zeta/2)$ 近傍に含まれることがわかる．この議論を続け，最後には，集合 $\mathcal{M}_i^{(k)}$ が p'' と同様に p' の $(\zeta+\zeta/2+\zeta/4+\cdots+\zeta/2^k)$ 近傍に含まれることを得る．p' から p'' への道が集合 $\mathcal{M}_i^{(k)}$ からの点とその点の集積点からなるので，p'' と同様に p' から $(\zeta+\zeta/2+\zeta/4+\cdots) = 2\zeta = \epsilon$ 内にある．これが，証明されるべきことであった．p', p'' はその道の一部であるので，$\eta \leq \epsilon$ となる．□

この定理を証明した後，ハーンは，ここで述べた性質によって，局所連結性を最初に定義できたのに（Hahn[3], p.2440 を参照），また，含みのある言い方で彼自身の多くの仕事を節約できたのにと，いくぶん強調して記している．これは，マズルキーウィッチ (Mazurkiewicz[1], [2]) が必然的に成し遂げたことである．(Hausdorff[1], p.179 も参照.)

§6.8　ハーン–マズルキーウィッチの定理

ハウスドルフの定理を使い，(5.1.2) 式の写像から，ルベーグの空間充填曲線を導く拡張過程を一般化することによって，$\mathcal{I}$ から任意のコンパクト，連結，局所連結な集合 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{E}^n$ への連続写像を作る準備ができた (Hahn[7]).

定理 (6.8)（ハーン–マズルキーウィッチ）　集合 $\mathcal{M}$ は，コンパクト，連結，局所連結であるとき，かつそのときに限り，$\mathcal{I}$ の連続像である．

証明　条件の必要性は，定理 6.2.2，6.3.1，6.3.2，6.5 に関する系において示された．ここでは，十分性だけを示す必要がある．

ハウスドルフの定理 6.6 によって，連続関数 $f : \Gamma \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{M}$ が存在する．Γ^c は，開区間 (a, b) の和集合である（5.2 節も参照）．像 $f(a)$ と $f(b)$ を $\mathcal{M}$ に含まれる連続道でつなぐことによって，f の定義を $\mathcal{I}$ に拡張する．(これは，定理 6.7.1 によってなされている）．Γ^c のあらゆる区間 (a, b) でこの

ことを行った後，Γ への制限がすでに全射的であるので，全射的である関数 $f : \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ が得られる．Γ への制限は，定理 6.6 によって連続であり，また，Γ がコンパクトであるので，Γ 上で一様連続である．Γ^c への制限は，作り方から連続である．実際，$\mathcal{I}$ 上で連続であるということは，ルベーグの空間充填曲線の連続性に関する定理 5.4.1 の証明と同様にして示されるであろう．

$t_0 \in \Gamma^c$ としよう．そのとき，f は，作り方から t_0 で連続である．

$t_0 \in \Gamma$ としよう．そのとき，これは，Γ の左集積点か，右集積点か，あるいは両側の集積点である．t_0 が，取り除かれた区間の 1 つの右側終点にあたる左集積点であり，したがって，f が左に連続であると仮定しよう．そこで，右にも連続であることを示す必要がある．

定理 6.7.2 によって，$\epsilon > 0$ に対して，ある $\eta > 0$ が存在し，$p, p'' \in \mathcal{M}$ と $\| p' - p'' \| < \eta$ のとき，$N_{\epsilon/2}(p'') \cap \mathcal{M}$ 内と同様に，$N_{\epsilon/2}(p') \cap \mathcal{M}$ 内にすべて含まれるような p' から p'' までの連続道が存在する．命題 6.7 に記したように，$\eta \leq \epsilon/2$ となる（ここでは，$\epsilon/2$ を ϵ の代わりに使っている）．

$f : \Gamma \to \mathcal{M}$ が Γ 上で一様連続であるので，ある $\delta > 0$ が存在し，$t_1, t_2 \in \Gamma$ と $|t_1 - t_2| < \delta$ のとき，

$$\| f(t_1) - f(t_2) \| < \eta \ (\leq \epsilon/2) \tag{6.8.1}$$

となる．今，$t \in \Gamma$ ならば，(6.8.1) 式より，$t, t_0 \in \Gamma$, $|t - t_0| < \delta$ に対して，

$$\| f(t) - f(t_0) \| < \epsilon/2 \tag{6.8.2}$$

となる．一方，$t \in \Gamma^c$ ならば，t は，カントール集合 $\Gamma : a, b \in \Gamma, (a, b) \subset \Gamma^c$ を作る上で取り除かれたある区間 (a, b) に含まれる．$b - a < \delta$ ならば，(6.8.1) 式によって，$\| f(a) - f(b) \| < \eta$ となり，定理 6.7.2 より，$f(a)$ の $\epsilon/2$ 近傍に含まれる $f(a)$ から $f(b)$ への連続道が存在する．道を $f : (a, b) \to \mathcal{M}$ とするならば，すべての $t \in (a, b)$ に対して，$\| f(t) - f(a) \| < \epsilon/2$ となる．したがって，t_1 に対して t_0，また，t_2 に対して a で (6.8.1) 式をみるならば，

$$\begin{aligned} \| f(t) - f(t_0) \| &\leq \| f(t) - f(a) \| + \| f(a) - f(t_0) \| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned} \tag{6.8.3}$$

を得る．右集積点に対する証明は，同様であり，両側の集積点に対する証明

も，これら 2 つの証明からともに導くことができる． □

ハーン–マズルキーウィッチの定理の証明は，ルベーグ型の空間充填曲線の作り方に関するレシピ (recipe) として捉えられるであろう．ルベーグの空間充填曲線それ自体は，目的の集合 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{Q}$ とし，集合 $\mathcal{K}_{i_1}$（ただし，$i_1 = 0,1,2,3$）に対して図 5.4.1 の部分正方形 $\mathcal{Q}_{00}, \mathcal{Q}_{01}, \mathcal{Q}_{10}, \mathcal{Q}_{11}$ を使い，また，集合 $\mathcal{K}_{i_1 i_2}$（ただし，$i_2 = 0,1,2,3$）に対して図 5.5.2 の部分正方形 $\mathcal{Q}_{0000}, \mathcal{Q}_{0001}, \mathcal{Q}_{0010}, \mathcal{Q}_{0011}, \ldots$ を使い，などなどと続け，さらに，各正方形からの出口点と次に続く正方形の入口点とを直線分でつなぐことによって得られる．ハーンの最初の証明 (Hahn[3]) は，逆に，ペアノの作図の一般化である．

定義，命題，定理を通して最終的にハーン–マズルキーウィッチの定理を導く方法をたどってみると，等価な概念が**開集合（近傍）**(open set(neighborhood))，**連続性** (continuity)，（ある種類の測度を必要とする）**閉塞性** (closeness)，**連結性** (connectedness) であることがわかる．そこで，($p_1 \in \Omega_1$，$p_2 \in \Omega_2$ であるようなつながっていない (disjoint) 開集合 $\Omega_1, \Omega_2 \in \tau$ が存在する任意の異なる 2 点 $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ を持った）**ハウスドルフ**の位相空間（部分集合 —— 開集合 —— の集まり τ を含み，τ の要素の任意の和集合が τ 内にあり，τ の要素の任意の有限積集合が τ 内にあり，$\emptyset$ と $\mathcal{S}$ が τ 内にある性質を持った空間 $\mathcal{S}$）において，その定理は成り立たなければならない．事実，**ハウスドルフ空間は，コンパクト，連結，局所連結な測度空間であるとき，かつそのときに限り，$\mathcal{I}$ の連続像を持つ**ことを示すことができる (Willard[1], pp.23, 86, 219, 221)．ハーン自身は，(Hahn[3], pp.2475–2489 において）自分の結果がさらに**フレシェ空間** (Fréchet space) においても成り立つことを示した．これは，フレシェが 1906 年の論文 (Fréchet[1]) で紹介した位相構造を持った概念空間である．これは，ハウスドルフ空間の前兆のようなものであったが，ハウスドルフ空間が 1914 年に現れたとき，後景に退いた (Engelking[1])．

この章の始めに述べたシェーンフリースの特徴づけに加えて，同様の他の特徴づけが現れた．1916 年に，マズルキーウィッチは，すべての点が**第 1 種** (of the first kind) であるコンパクト連結部分集合 $\mathcal{M}$ として $\mathcal{I}$ の連続像を特徴づけた．これは，任意の $p \in \mathcal{M}$ とすべての $\epsilon > 0$ に対して，ϵ より小さな

径を持った $\mathcal{M}$ のコンパクト連結部分集合 $\mathcal{K}$ が存在し，$\mathcal{M}$ からの点が，p の η 内にあるときいつでも，$\mathcal{K}$ 内にあるようなある $\eta > 0$ が存在するという意味である（Mazurkiewicz[5], p.441，あるいは，Sierpiński[8], pp.56–57 を参照）．1921 年には，ハーンは同じ特徴づけにたどりついた (Hahn[6])．同年，ハーンは，測度空間 S 内の 1 つの開集合のあるゆる構成要素 (component) に対して，S が局所連結であることが，必要十分であることを示した (Hahn[5])．($p \in S$ に対して，p を含む S のすべての連結部分集合の和集合は，S の構成要素と呼ばれる.)

1920 年，シェルピンスキーは，さらに他の特徴づけを見い出した．**集合は，コンパクト，連結であり，あるゆる $\delta > 0$ に対して直径 $\leq \delta$ を持った有限個のコンパクト連結集合の和集合として表されるとき，かつそのときに限り，$\mathcal{I}$ の連続像を持つ** (Sierpiński[8])．(読者は，シェルピンスキーとマズルキーウィッチが**ジョルダン曲線**という言葉を使うとき，それが，線分の連続像を意味し，線分の連続単射像ではないことを注意しておく.)

1921 年には，A. ローゼンタールは，線分の連続像であり，その境界が連続曲線でない，有界で簡単な連結集合の例を作った (Rosenthal[1])．

§6.9　確率的独立関数による空間充填曲線の生成

これまでに，空間充填曲線を生成する 2 つの方法に出会った．1 つは，目的の集合を b^{2n} 個のレプリカ（複製）に分け，$\mathcal{I}$ の b^{2n} 個の合同部分区間と，ヒルベルト曲線，ペアノ曲線，シェルピンスキー曲線やその変形のようなヒルベルト型の曲線に沿った適当な順番に並べた前述のレプリカの間の対応をとる方法であった．もう 1 つは，定理 6.8 のハーンの証明において概観し，2 次元の例である（第 5 章の）ルベーグ曲線と（次章で述べる）シェーンベルク曲線を n 次元（そして無限次元）空間充填曲線に導く方法であった．

1936 年，フーゴ・シュタインハウスは，空間充填曲線が確率的独立関数によって生成されるという驚くべき発見をした (Steinhaus[1])．彼は，この結果を簡潔に書いたメモの形で発表した．雑誌 *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*(Paris, 1936) の第 202 巻の 2331 ページの中で深く埋もれてい

て，ほとんど無視された．40 年後，A. M. ガルシアや他の人はシュタインハウスが発表していることに気づかず，同じ結論にたどりつき，それを練り，潤色し，一連の発表で広めようとした（Garsia[1], Gelbaum[1], Bosznay[1], Milne[1], Bryc[1], Holbrook[1], Yost[1], Robertson[1] — Donoghue[1] も参照）．

シュタインハウスの結果の重要な点は，ヒルベルト曲線やペアノ曲線のような 2 次元空間充填曲線で知られた座標関数によって，n 次元（$\aleph_0$ 次元）空間充填曲線の作り方を考慮したことである．

定義 (6.9.1) n 個の可測関数 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ は，任意の n 個の可測集合 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}$ に対して，

$$\Lambda_1 \left[\bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^*(\mathcal{A}_j) \right] = \prod_{j=1}^{n} \Lambda_1[\varphi_j^*(\mathcal{A}_j)] \qquad (6.9.1)$$

であれば，**ルベーグ測度に関して確率的に独立である**と呼ばれる．

そのような関数が連続，非定数であれば，それらは，n 次元空間充填曲線を定める．

定理 (6.9.1)(シュタインハウス) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ が連続，非定数，ルベーグ測度に関して確率的独立であれば，

$$f = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)^T : \mathcal{I} \stackrel{\text{onto}}{\longrightarrow} \varphi_{1*}(\mathcal{I}) \times \varphi_{2*}(\mathcal{I}) \times \cdots \times \varphi_{n*}(\mathcal{I})$$

は，空間充填曲線である．

証明 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ が連続であるので，定理 6.3.1，6.3.2 に関する系から，$\varphi_{1*}(\mathcal{I}), \varphi_{2*}(\mathcal{I}), \ldots \varphi_{n*}(\mathcal{I})$ が閉区間であり，また，$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ が非定数であるので，これらの区間は，内点を持つことがわかる．$\mathcal{P} \triangleq \varphi_{1*}(\mathcal{I}) \times \varphi_{2*}(\mathcal{I}) \times \cdots \times \varphi_{n*}(\mathcal{I})$ とし，また，$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \in \mathcal{P}$ としよう．$\mathcal{P}$ は，コンパクト集合のデカルト積で，コンパクトである．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\mathcal{A}_j = (\xi_j - \epsilon, \xi_j + \epsilon)$（ただし，$j = 1, 2, 3, \ldots, n$）としよう．作り方によって，すべて

の $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$\varphi_j^*(\mathcal{A}_j) \neq \emptyset$ となる．$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ が連続であるので，定理 6.1.1 から，$\varphi_j^*(\mathcal{A}_j) = \mathcal{A}_j^{(1)} \cap \mathcal{I}$ であるような開集合 $\mathcal{A}_j^{(1)} \subseteq \mathbb{R}$ が存在し，したがって，すべてのこれらの集合は，可測であり，$\Lambda_1[\varphi_j^*(\mathcal{A}_j)] > 0$ である．よって，(6.9.1) 式から，$\Lambda_1[\bigcap_{j=1}^n \varphi_j^*(\mathcal{A}_j)] > 0$ であり，その結果，ある $t \in \bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^*(\mathcal{A}_j)$ が存在する．これは，$f(t) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ であること，すなわち，$\| f(t) - x \| < \sqrt{n}\epsilon$ であることを意味する．ゆえに，$f_*(\mathcal{I})$ は，$\mathcal{P}$ において稠密である．定理 6.2.2 に関する系より，$f_*(\mathcal{I})$ もコンパクトである．$\mathcal{P}$ がコンパクトであるので，命題 6.2.2 から $f_*(\mathcal{I}) = \mathcal{P}$ であることがわかる．　□

既知の 2 次元空間充填曲線から，より高次元の空間充填曲線を作るためにこの結果を使うため，**一様分布** (uniform distribution) の概念を必要とする．

定義 (6.9.2)　任意の可測集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ に対して，

$$\Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A})] = \Lambda_1(\mathcal{A}) \tag{6.9.2}$$

を満たせば，関数 $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ は，ルベーグ測度に関して一様分布であるという．

シュタインハウスは，次の 4 次元空間充填曲線の作り方を提案している．$\varphi, \psi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ は，連続，非定数，確率的独立，一様分布である．

$$\alpha(t) = \varphi(\varphi(t)),\ \beta(t) = \varphi(\psi(t)),\ \gamma(t) = \psi(\varphi(t)),\ \delta(t) = \psi(\psi(t)) \tag{6.9.3}$$

としよう．その関数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は，連続，非定数，一様分布である．次の議論からわかるように，それらは，さらに確率的独立である．

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を $\mathbb{R}$ の可測部分集合であるとし，また，

$$\mathcal{A}_1 = \varphi^*(\mathcal{A}),\ \mathcal{B}_1 = \varphi^*(\mathcal{B}),\ \mathcal{C}_1 = \psi^*(\mathcal{C}),\ \mathcal{D}_1 = \psi^*(\mathcal{D})$$

$$\mathcal{A}_2 = \varphi^*(\mathcal{A}_1),\ \mathcal{B}_2 = \psi^*(\mathcal{B}_1),\ \mathcal{C}_2 = \varphi^*(\mathcal{C}_1),\ \mathcal{D}_2 = \psi^*(\mathcal{D}_1)$$

としよう．(6.1.5) 式から，

$$\begin{aligned}\alpha^*(\mathcal{A}) = \varphi^*(\varphi^*(\mathcal{A})),\ \beta^*(\mathcal{B}) = \psi^*(\varphi^*(\mathcal{B}))\\ \gamma^*(\mathcal{C}) = \varphi^*(\psi^*(\mathcal{C})),\ \delta^*(\mathcal{D}) = \psi^*(\psi^*(\mathcal{D}))\end{aligned} \tag{6.9.4}$$

である．φ，ψ の確率的独立性と一様分布から，また，(6.1.3) 式と (6.9.4) 式を考慮して，

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1[\alpha^*(\mathcal{A})\cap\beta^*(\mathcal{B})\cap\gamma^*(\mathcal{C})\cap\delta^*(\mathcal{D})] = \Lambda_1(\mathcal{A}_2\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{C}_2\cap\mathcal{D}_2)\\
&= \Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A}_1)\cap\psi^*(\mathcal{B}_1)\cap\varphi^*(\mathcal{C}_1)\cap\psi^*(\mathcal{D}_1)]\\
&= \Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A}_1\cap\mathcal{C}_1)\cap\psi^*(\mathcal{B}_1\cap\mathcal{D}_1)]\\
&= \Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A}_1\cap\mathcal{C}_1)]\Lambda_1[\psi^*(\mathcal{B}_1\cap\mathcal{D}_1)]\\
&= \Lambda_1(\mathcal{A}_1\cap\mathcal{C}_1)\Lambda_1(\mathcal{B}_1\cap\mathcal{D}_1)\\
&= \Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A})\cap\psi^*(\mathcal{C})]\Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{B})\cap\psi^*(\mathcal{D})]\\
&= \Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A})]\Lambda_1[\psi^*(\mathcal{C})]\Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{B})]\Lambda_1[\psi^*(\mathcal{D})]\\
&= \Lambda_1(\mathcal{A}_1)\Lambda_1(\mathcal{B}_1)\Lambda_1(\mathcal{C}_1)\Lambda_1(\mathcal{D}_1)\\
&= \Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{A}_1)]\Lambda_1[\psi^*(\mathcal{B}_1)]\Lambda_1[\varphi^*(\mathcal{C}_1)]\Lambda_1[\psi^*(\mathcal{D}_1)]\\
&= \Lambda_1(\mathcal{A}_2)\Lambda_1(\mathcal{B}_2)\Lambda_1(\mathcal{C}_2)\Lambda_1(\mathcal{D}_2)\\
&= \Lambda_1[\alpha^*(\mathcal{A})]\Lambda_1[\beta^*(\mathcal{B})]\Lambda_1[\gamma^*(\mathcal{C})]\Lambda_1[\delta^*(\mathcal{D})]
\end{aligned}$$

であることがわかる．すなわち，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は，確率的独立であり，定理 6.9 より 4 次元空間充填曲線を定めている．

上述の作り方に必要な曲線 φ, ψ は，保測写像の座標関数 $f:\mathcal{I}\overset{\text{onto}}{\longrightarrow}\mathcal{Q}$ として得られるであろう．

定義 (6.9.3)　$f:\mathcal{I}\overset{\text{onto}}{\longrightarrow}\mathcal{Q}$ は，任意の可測部分集合 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{Q}$ に対して，

$$\Lambda_1(f^*(\mathcal{A})) = \Lambda_2(\mathcal{A})$$

であれば，保測 (measure-preserving) と呼ばれる．

次の定理が得られる．

定理 (6.9.2)　$f = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} : \mathcal{I} \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{Q}$ が保測であれば，その座標関数 φ, ψ は，一様分布であり，確率的独立である．

証明　(カトビーツェにあるポルスキー科学協会 (Polskiej Akademii Nauk) のクシシュトフ・ロスコットによる次の簡単な証明による.)

任意の部分集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ に対して，$f^*(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \{t \in \mathcal{I} | \varphi(t) \in \mathcal{A}$ かつ $\psi(t) \in \mathcal{B}\} = \varphi^*(\mathcal{A}) \cap \psi^*(\mathcal{B})$ から，$\mathcal{B} = \mathcal{I}$ に対して，

$$f^*(\mathcal{A} \times \mathcal{I}) = \varphi^*(\mathcal{A}) \cap \psi^*(\mathcal{I}) = \varphi^*(\mathcal{A})$$

が得られ，したがって，f が保測であるので，

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\varphi^*(\mathcal{A})) &= \Lambda_1(f^*(\mathcal{A} \times \mathcal{I})) = \Lambda_2(\mathcal{A} \times \mathcal{I}) \\ &= \Lambda_1(\mathcal{A})\Lambda_1(\mathcal{I}) = \Lambda_1(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

となる．同様の推論によって，

$$\Lambda_1(\psi^*(\mathcal{B})) = \Lambda_1(\mathcal{B})$$

となり，すなわち，φ, ψ は，一様分布である．また，

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\varphi^*(\mathcal{A}) \cap \psi^*(\mathcal{B})) &= \Lambda_1(f^*(\mathcal{A} \times \mathcal{B})) = \Lambda_2(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \Lambda_1(\mathcal{A})\Lambda_1(\mathcal{B}) \\ &= \Lambda_1(\varphi^*(\mathcal{A}))\Lambda_1(\psi^*(\mathcal{B})) \end{aligned}$$

であるので，φ, ψ が確率的独立であることがわかる．□

(この定理の逆も成り立つが，ここでは必要としない.)

第 2, 3, 4 章のヒルベルト写像，ペアノ写像，シェルピンスキー–クノップ写像は，実際，保測である．1976 年の論文において，ガルシアは，「この事実は，これまで文献において気づかれないままだったようだ」と書いている (Garsia[1], p.167, 第 2 段落)．40 年前，もしかするとそれ以前にシュタインハウスが知っていたかもしれない．ペアノ写像が保測であるということの証明については，読者は，S. C. ミルン (Milne[1], pp.155–157) の 1980 年の論文を参照されたい．

確率的独立，一様分布である φ, ψ に，たとえば，ペアノ曲線の座標関数

を使って，次の

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi(t) \\ x_2 &= \varphi \circ \psi(t) \\ x_3 &= \varphi \circ \psi \circ \psi(t) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi \circ \psi \circ \psi \circ \ldots \circ \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathcal{I}$$

は，座標関数が連続，非定数，確率的独立であるので，n 次元空間充填曲線を定める．読者は，このことを容易に確かめられるであろう．その考え方は，シュタインハウスが彼の論文に記したように，まったく自然に $\aleph_0$ 次元の空間充填曲線に拡張できる（Jessen[1] も参照）．この含みから，$\aleph_0$ 次元単位立方体 $\mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \cdots$ のカージナル数は $\mathfrak{c}$，すなわち，連続体のカージナル数となる．このことは，ルベーグがすでに知っていたことである．彼は，1905 年の論文において (Lebesgue[2], p.210)，実数の任意に与えられた列 $a_n \in \mathcal{I}$ に対して，$\varphi_n(t) = a_n$（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）であるような少なくとも 1 つの $t \in \mathcal{I}$ が存在することを使って，一連の連続関数 $\varphi_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）が存在することを示した．1937 年の論文において，シェルピンスキーは，ルベーグの定理を満たす関数 φ_n が，$\varphi_n(t) = \varphi \circ \psi \circ \ldots \circ \psi(t)$ によるペアノ曲線の座標関数 φ, ψ によって表されることを示した．ここで，ψ の合成が $n-1$ 回とられている —— シュタインハウスが異なった方法で 1 年早く示したものと同じ結果である．(Sierpiński[9], Kuratowski[1](p.150) と Dinghas[1] も参照.）7.5 節では，$\aleph_0$ 次元空間充填曲線の異なった作り方に出会うであろう．

§6.10　解析関数による空間充填曲線の表現

1945 年，R. サレムと A. ジグムントは，開単位円板内で解析的であり，閉単位円板上で連続であるような，単位円板の円周を正方形に写像する 1 複素変数の複素数値関数を見つけた (Salem-Zygmund[1])．それらの関数は，空隙ベキ級数によって表現されている．7 年後の 1952 年になってようやく，G. ピラニ

アン，C. T. ティートゥス，G. S. ヤングが，独創的であるが，まったく基本的なそのような関数の作り方を発表した (Piranian, Titus, and Young[1])．その後，1954 年には，A. C. シェーファの結果が発表され (Schaeffer[1])，1960 年には，F. バジェミールと G. ピラニアンの結果が発表された (Bagemihl and Piranian[1])．

次の定理では，G. ピラニアン，C. J. ティートゥス，G. S. ヤングの 1952 年の結果を示す．

定理 (6.10)　開単位円板 $|z| < 1$ 上で解析的であり，閉単位円板 $|z| \leq 1$ 上で連続であり，円周 $|z| = 1$ を正方形 $[-1, 1]^2$ に写像する，1 複素変数の複素数値関数が存在する．

証明　(構成による.) 列 $\{\alpha_k\} \to 0$, $\{\gamma_k\} \to 0$ と，単位円 $|z| = 1$ 上で異なる点の列 $\{\beta_k\}$ が適当に選ばれるならば，関数

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k [1 - (1 - z/\beta_k)^{\alpha_k}],\ \alpha_k > 0,\ \beta_k,\ \gamma_k \in \mathbb{C} \tag{6.10.1}$$

は，すべての必要な性質を持っていることを示す．

$$f_k(z) = \gamma_k [1 - (1 - z/\beta_k)^{\alpha_k}] \tag{6.10.2}$$

としよう．$|\beta_k| = 1, |z| \leq 1, \alpha_k > 0$ より，$|1 - z/\beta_k| = (1/|\beta_k|)|\beta_k - z| \leq |\beta_k| + |z| \leq 2$ を考えて，すべての $|z| \leq 1$ と十分に小さな α_k に対して，

$$\begin{aligned} |f_k(z)| &= |\gamma_k|\,|1 - (1 - z/\beta_k)^{\alpha_k}| \\ &\leq |\gamma_k|(1 + e^{\alpha_k \log|\beta_k - z|}) \leq |\gamma_k|(1 + e^{\alpha_k \log 2}) \leq 4|\gamma_k| \end{aligned} \tag{6.10.3}$$

となることがわかる．

$\mathcal{N}_k \triangleq N_{\delta_k}(\beta_k)$ とし，また，$|z| \leq 1$ であるが，$z \in \mathcal{N}_k^c$ とする．

$$(1 - z/\beta_k)^{\alpha_k} = e^{\alpha_k (1/\beta_k) \log(\beta_k - z)}$$

なので，また，$|\beta_k - z| \geq \delta_k$ なので，$(1 - z/\beta_k)^{\alpha_k}$ ができるだけ 1 に近くなるように，α_k を小さく選ぶことができる．したがって，適当に小さな α_k

とすべての $z \in \mathcal{N}_k^c$ に対して，

$$|f_k(z)| \leq 1/k^2 \tag{6.10.4}$$

となる．($\{\gamma_k\} \to 0$ であり，したがって，ある $M > 0$ とすべての k に対して，$|\gamma_k| \leq M$ となることに注意.)

これで，α_k, β_k, γ_k の選択についての準備ができた．図 6.10 に示されるように，正方形 $[-1,1]^2$ を 4 つの合同部分正方形 $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$ に分割し，また，$\beta_1 = (\sqrt{2}/2)(1-i)$, $\beta_2 = (\sqrt{2}/2)(-1+i)$, $\beta_3 = (\sqrt{2}/2)(1+i)$, $\beta_4 = (\sqrt{2}/2)(1-i)$ とし，$k = 1,2,3,4$ に対して，$\gamma_k = \beta_k$ としよう．そのとき，$k = 1,2,3,4$ に対して，$f_k(\beta_k) = \gamma_k (= \beta_k)$ である．$\mathcal{N}_k$ が $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}$ を含まないように $\mathcal{N}_k$ をとる．また，

$$F_4(\beta_k) = f_1(\beta_k) + f_2(\beta_k) + f_3(\beta_k) + f_4(\beta_k) \in \mathcal{Q}_k^0$$

であり，かつ，$k = 1,2,3,4$ に対して，(6.10.4) 式を満たすように小さな $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を選ぼう．z が $\mathcal{N}_k$ にあるか，あるいは 1 つもないかのいずれかとなるので，(6.10.3) 式と (6.10.4) 式より，ある $j \in \{1,2,3,4\}$ に対して，

$$\begin{aligned} |f_1(z)| + f_2(z)| + |f_3(z)| + |f_4(z)| &\leq 4|\gamma_j| + 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 \\ &= 4 + \sum_{k=1}^{4} 1/k^2 \end{aligned}$$

を得る（$j = 1,2,3,4$ に対して，$|\gamma_j| = 1$ であることに注意）．

次に，正方形 $\mathcal{Q}_k$ を 4 つの合同部分正方形 $\mathcal{Q}_{jk}$ に分割し，図 2.1 のヒルベルト曲線を作ったときと同じ順番にそれらを並べよう（図 6.10 を参照）．また，$k = 5,6,7,8$ に対して，$F_4(\beta_k) \in \mathcal{Q}_1$ であるような $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ を（β_1 の近くで）取り上げよう．$F_5(\beta_5) \in \mathcal{Q}_{11}$ であるように γ_5 を選ぼう．これは，常に $F_5 = F_4 + f_5$ と $F_4(\beta_5) \in Q_1$ であるので可能となる．したがって，必要なことは，Q_1 の直径の長さである $|\gamma_4| = |f_5(\beta_5)| = |F_5(\beta_5) - F_4(\beta_5)| \leq \sqrt{2}$ を取り上げることである（図 6.10 を参照）．最後に $F_6(e^{i\theta})$（ただし,$0 \leq \theta \leq 2\pi$）がさらに $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$ の内側を通過し，$k = 6$ に対して (6.10.4) 式を満たすように十分小さな α_5 を選ぶ．同様に，$F_8(e^{i\theta})$ が $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$ の内側を通過し，$k = 7,8$ に対して (6.10.4) 式を満たすように，$F_7(\beta_7) \in \mathcal{Q}_{21}$，$F_8(\beta_8) \in \mathcal{Q}_{22}$

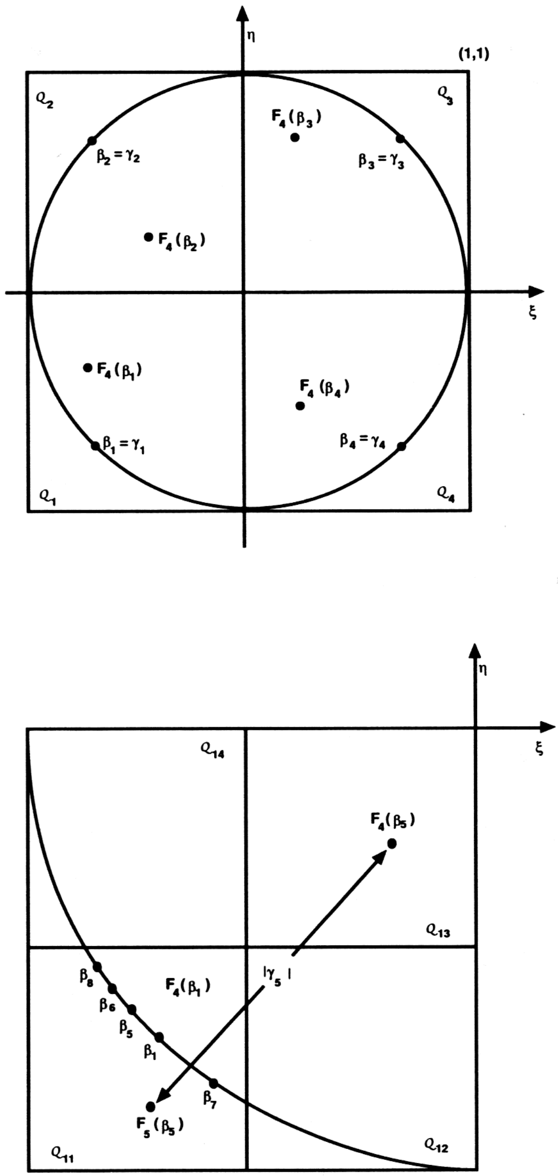

η
(1,1)
Q_2
Q_3
$F_4(\beta_3)$
$\beta_2=\gamma_2$
$\beta_3=\gamma_3$
$F_4(\beta_2)$
ξ
$F_4(\beta_1)$
$F_4(\beta_4)$
$\beta_1=\gamma_1$
$\beta_4=\gamma_4$
Q_1
Q_4
η
ξ
Q_{14}
$F_4(\beta_5)$
Q_{13}
β_8
$F_4(\beta_1)$
$|\gamma_5|$
β_6
β_5
β_1
β_7
$F_5(\beta_5)$
Q_{11}
Q_{12}

図 6.10 $f(z)$ の作図

を得る．次に，Q_2 を分割し，$\beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}$ を（β_2 の近くで）取り上げ，前と同様とする．4 つの正方形 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 の各々を，4 つの部分正方形に分割し，$F_{20}(e^{i\theta})$ がすべての部分正方形 Q_{jk} の内側を通過し，各 $\mathcal{N}_k$ が $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ を含まないように選ばれる (6.10.3) 式を満たすように，β_5 から β_{20}，γ_5 から γ_{20}，α_5 から α_{20} を取り上げた後，

$$|f_5(z)| + |f_6(z)| + \cdots + |f_{20}(z)| \leq 4\sqrt{2} + \sum_{k=5}^{20} 1/k^2$$

を得る．なぜならば，ある $k \in \{5, 6, \ldots, 20\}$ に対して，$z \in \mathcal{N}_k$ であるか，またはいずれにも入らない．次のステップでは，16 個の部分正方形 Q_{jk} の各々を 4 つの合同部分正方形に分割し，$|\gamma_k| \leq \sqrt{2}/2$，すなわち，$k = 21, 22, \ldots, 84$ に対する Q_{jk} の直径の長さとなり，前のように

$$|f_{21}(z)| + |f_{22}(z)| + \cdots + |f_{84}(z)| \leq 4\sqrt{2}/2 + \sum_{k=21}^{84} 1/k^2$$

を得る．最終的に，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| \leq 4 + 4\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k + \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$$

となる．f_k が $|z| < 1$ で解析的であり，$|z| \leq 1$ で連続であるので，(6.10.1) 式に定義されているように，f は，$|z| < 1$ で実際に解析的であり，また，$|z| \leq 1$ で連続である (Carathéodory[1])．さらに，作り方から，$f(e^{i\theta})$（ただし,$0 \leq \theta \leq 2\pi$）があらゆる部分正方形の内側を通過し，すなわち，$[-1, 1]^2$ において稠密であることがわかる．$\{f(e^{i\theta}) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ もコンパクトであるので，命題 6.2.2 から，それは $[-1, 1]^2$ に等しく，定理は証明された　□

§6.11　問題

1. 有理数の集合が $\mathbb{R}$ において稠密であることを示しなさい．
2. $\mathcal{D} = \{0_{\dot{2}} b_1 b_2 b_3,,, b_s | b_j = 0$ あるいは $1, s = 1, 2, 3, \ldots\}$ としよう．$\mathcal{D}$ が $\mathcal{I}$ において稠密であることを示しなさい．

3. $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{I}$ ならば，あらゆる $a \in \mathcal{I}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるような列 $\{a_n\}$（ただし，$a_n \in \mathcal{D}$）が存在することを示しなさい．
4. (6.1.1) 式から (6.1.4) 式への関係を検証しなさい．
5. すべての $t \in \mathcal{D}$ に対して，$\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{I}$ と $f(t) = g(t)$ であり，f, g が連続であれば，すべての $t \in \mathcal{I}$ に対して，$f(t) = g(t)$ であることを証明しなさい．
6. 有限の部分被覆を含まない区間 $(0, 1]$ の開被覆を求めなさい．
7. コンパクト集合 $\mathcal{K}$ のあらゆる無限部分集合が，$\mathcal{K}$ 内の 1 点に収束する列を含むことを証明しなさい．
8. 有限に多くのコンパクト集合のデカルト積が，コンパクトであることを証明しなさい．
9. 図 6.3.1 の集合は連結であるが，図 6.3.2 の集合は連結でないことを示しなさい．
10. $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ が連続ならば，$f_*(\mathcal{I})$ は区間であることを示しなさい．
11. 2 つの連結集合が共通に 1 点を持つならば，それらの和集合も連結であることを証明しなさい．
12. $\mathcal{C}$ が閉であることを仮定することなしに命題 6.3 を証明しなさい．
13. 図 6.3.1 の集合は局所連結でないが，図 6.3.2 の集合は局所連結であることを示しなさい．
14. 図 6.3.1 の集合が完全集合 (perfect set) であることを示しなさい．(ある集合が，その集積点の集合と等しいときに**完全** (perfect) であるという．)
15. 123 ページに記述した図 6.3.2 の集合から図 6.3.1 の集合への関数は，連続であることを示しなさい．
16. $\mathcal{S}_{b_1}, \mathcal{S}_{b_1,b_2}, \mathcal{S}_{b_1 b_2 b_3} \ldots$ を $\mathbb{E}^n$ の空でないコンパクト部分集合としよう．ここで，$b_j = 0$ または 1 である．このとき，

$$\mathcal{S}_{b_1} \supseteq \mathcal{S}_{b_1 b_2} \supseteq \mathcal{S}_{b_1 b_2 b_3} \supseteq \ldots$$

となり，$k \to \infty$ のとき，$\mathcal{S}_{b_1 b_2 b_3 \ldots b_k}$ の直径が 0 に縮退する．カントールの交わりの定理によれば，

$$\mathcal{S}_{b_1} \cap \mathcal{S}_{b_1 b_2} \cap \mathcal{S}_{b_1 b_2 b_3} \cap \ldots$$

は，$\mathbb{E}^n$ においてただ 1 点よりなる．すべてのそのような点の集合

$$\bigcup\left(\bigcap \mathcal{S}_{b_1 b_2 b_3 \ldots b_k}\right)$$

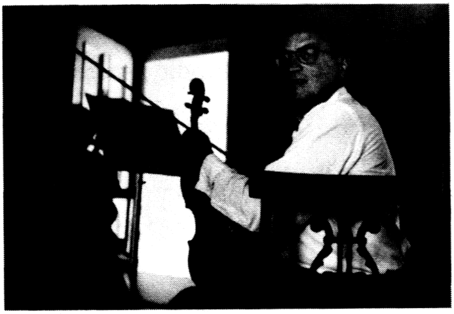
は **2 進** (dyadic) 集合と呼ばれる．ここで和集合は，すべての 2 進列上に拡張されるものである．あらゆるコンパクト集合が，2 進集合であることを証明しなさい．

17. 問題 16 において $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ が互いに素 (disjoint) であり，$\mathcal{S}_{b_1 0}, \mathcal{S}_{b_1 1}$ が互いに素であり，$\mathcal{S}_{b_1 b_2 0}$，$\mathcal{S}_{b_1 b_2 1}$ が互いに素であり，などなどであるならば，問題 16 の 2 進集合は **2 進不連続体** (dyadic discontinuum) と呼ばれる．カントール集合が 2 進不連続体であることを示しなさい．
18. あらゆるコンパクト集合が，2 進不連続体の連続像であることを証明しなさい．
19. 図 6.3.1 と図 6.3.2 の集合は道状連結でないことを示しなさい．
20. 定理 6.8 の証明において概観した方法を使って，ルベーグ以外の空間充填曲線 $f : \mathcal{I} \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{Q}$ を作りなさい．
21. **弧** (arc) は，閉じた有界区間から $\mathbb{E}^n$ への連続微分可能関数の像である．$\mathbb{E}^n$ の部分集合は，任意の 2 点が集合に完全に含まれる弧によって連結されるならば，**弧状連結されている** (arcwise connected) という．$\mathbb{E}^n$ の部分集合 $\mathcal{M}$ は，弧状連結され，かつ，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\eta > 0$ が存在し，$\| p' - p'' \| < \eta$ となる任意の 2 点 $p', p'' \in \mathcal{M}$ に対して，$N_\epsilon(p'') \cap \mathcal{M}$ と同様に $N_\epsilon(p') \cap \mathcal{M}$ に完全に含まれる p' から p'' への弧が存在するとき，**一様に弧状連結されている** (uniformly arcwise connected) という．$\mathbb{E}^n$ のコンパクト部分集合 $\mathcal{M}$ が一様に弧状連結されていれば，$\mathcal{I}$ からほとんどいたるところ微分可能な $\mathcal{M}$ への連続写像が存在することを示しなさい．
22. (6.9.3) 式で定義した関数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が一様分布であることを示しなさい．((6.9.2) 式を参照.)
23. $\varphi, \psi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ を確率的独立であり，一様分布，連続，非定数関数であるとしよう．関数 $\alpha = \varphi$，$\beta = \varphi \circ \psi$，$\gamma = \varphi \circ \psi \circ \psi$ が確率的独立であることを示しなさい．$\varphi = \varphi_p$，$\psi = \psi_p$ とし，写像 $f = (\alpha, \beta, \gamma)^T : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ の幾何的解釈を与えなさい．

24. 問題 23 の φ, ψ において，$\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = \varphi \circ \psi$, $\alpha_3 = \varphi \circ \psi \circ \psi$, ..., $\alpha_n = \varphi \circ \psi \circ \psi \circ \ldots \circ \psi$ としよう．$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ が n 次元空間充填曲線を表していることを示しなさい．
25. 問題 24 の結果を使って，3 次元ヒルベルト曲線と 3 次元ペアノ曲線を作りなさい．その結果と 2.8 節と 3.8 節の曲線を比較しなさい．
26. $f : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ が定義 (6.9.3) によって保測であるならば，$\Lambda_2(f(\mathcal{B})) = \Lambda_1(\mathcal{B}), \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ であることを示しなさい．
27. 定理 6.9.2 の逆を証明しなさい．
28. f が (6.10.1) 式で定義されている空間充填曲線 $f \circ e^{i\theta} : [0, 2\pi] \to [-1, 1]^2$ は，スケール変換や適当な移動後，2.1 節のヒルベルト曲線になるか?
29. $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \supseteq \mathcal{A}_3 \supseteq \mathcal{A}_4 \supseteq \ldots$ をコンパクト，連結，局所連結集合であるとしよう．$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ が局所連結である必要がないことを，例によって示しなさい．
30. **カントール・ブラシ** (Cantor brush) は，点 $(1/2, 1)$ からカントール集合のすべての点への線分上に存在する $\mathbb{E}^2$ のすべての点の集合として定義される．カントール集合は，コンパクト，連結，局所連結であるか?
31. ペアノ写像 $f_p : [0, 1] \to \mathcal{Q}$ の下で，$[0, 1]$ に 4 つの前像を持つ $\mathcal{Q}$ 内の点が，$\mathcal{Q}$ において稠密であることを示しなさい．
32. ヒルベルト写像 $f_h : [0, 1] \to \mathcal{Q}$ の下で，$[0, 1]$ に少なくとも 3 つの前像を持つ $\mathcal{Q}$ 内の点が，$\mathcal{Q}$ において稠密であることを示しなさい．
33. シェルピンスキー–クノップ写像 $f_s : [0, 1] \to \mathcal{Q}$ に対して問題 32 と同じことを示しなさい．

第 7 章　シェーンベルクの空間充填曲線

§7.1　定義と基本的性質



アイザック J. シェーンベルク (1903–1990) は，ルーマニアのガラツに生まれ，アメリカ合衆国のウィスコンシン州マディソンに歿した．彼は，ヤシー大学，ゲッティンゲン大学，ベルリン大学で学び，1926 年にヤシー大学より博士号を取得した．1930 年のアメリカ合衆国への移住後，シカゴ大学，ハーバード大学，プリンストン高等研究所 (Institute for Advanced Studies at Princeton) で特別研究員となった．1935 年から，スワースモーア大学，コルビー大学，1948 年に教授になったペンシルベニア大学，そして 1973 年の退官まで勤めたウィスコンシン大学において，教鞭をとった．1945 年から 1946 年にかけて，アバディーン実験場 (Aberdeen Proving Grounds) 内の弾道学研究所の計算部門のパンチ・カード科の主任だった．1965 年から退職まで，ウィスコンシン大学とマディソンの陸軍研究センターを併任した．(Schoenberg[2], 裏表紙.)

1938 年には，コルビー大学において 2 時間の機械の試験の試験監督をしながら (Schoenberg[3])，I. J. シェーンベルクは，カントール集合 Γ から $\mathcal{Q}$ への連続写像 (5.1.2) 式から始め，この写像の定義を $\mathcal{I}$ に拡張するための新たな方法を見い出した (Schoenberg[1])．彼の補間は，このようにして得られ

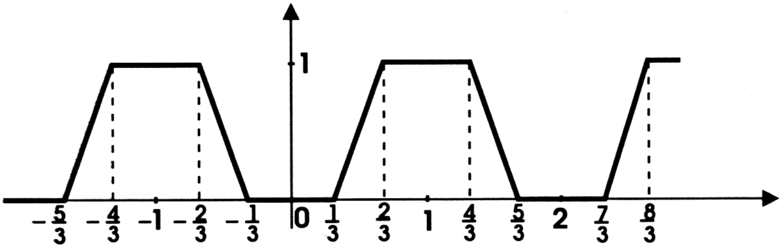


図 7.1　生成関数 p のグラフ

た関数が全区間 $\mathcal{I}$ 上で連続であり，定理 5.4.1 の証明のような面倒な証明を回避できることがわかった．

シェーンベルクは，写像 $f_{sc}:\mathcal{I}\to\mathcal{Q}$ の要素 φ_{sc}, ψ_{sc} を，2 周期の生成偶関数 (even, two-periodic generating function)

$$p(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le \frac{1}{3} \quad \text{のとき} \\ 3t-1, & \frac{1}{3}\le t\le \frac{2}{3} \quad \text{のとき} \\ 1, & \frac{2}{3}\le t\le 1 \quad \text{のとき} \end{cases},\quad p(-t)=p(t),\quad p(t+2)=p(t) \tag{7.1.1}$$

によって（図 7.1 も参照），

$$\varphi_{sc}(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}p(3^{2k}t)/2^k,\ \psi_{sc}(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}p(3^{2k+1}t)/2^k \tag{7.1.2}$$

と定義した．

(7.1.2) 式で定義した写像は連続である．これは，次のように考えられる．(7.1.2) 式の級数 (series) は，幾何級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ によって支配され，したがって，一様収束する．個々の項は，連続であり，また，連続関数の一様収束級数が連続関数を表すので（付録 A.2.4 を参照），φ_{sc}, ψ_{sc} は連続である．□

(7.1.2) 式で定義した写像は $\mathcal{Q}$ 上で全射である．カントール集合 Γ への f_{sc} の制限 (restriction)[1] は，(5.1.2) 式の写像と等しいことを以下に示そう．

[1]［訳註］写像の定義域がその部分集合になっている．

後者は，$\mathcal{I}$ から $\mathcal{Q}$ への写像であるので，全射性は保証されている．

$t \in \Gamma$ を

$$t = 2b_1/3 + 2b_2/3^2 + 2b_3/3^3 + \cdots,\ b_j = 0 \text{ または } 1$$

としよう．そのとき，

$$\begin{aligned} 3^{2k}t &= 2b_1 3^{2k-1} + 2b_2 3^{2k-2} + \cdots + 2b_{2k} + 2b_{2k+1}/3 + 2b_{2k+2}/3^2 + \cdots \\ &= \text{偶整数} + 2b_{2k+1}/3 + 2b_{2k+2}/3^2 + \cdots \end{aligned}$$

となる．また，

$$2b_{2k+2}/3^2 + 2b_{2k+3}/3^3 + \cdots \leq 1/3$$

なので，(7.1.1) 式より，

$$p(3^{2k}t) = \begin{cases} 0, & b_{2k+1} = 0 \text{ のとき} \\ 1, & b_{2k+1} = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となることがわかる．言い換えると，$p(3^{2k}t) = b_{2k+1}$ である．したがって，

$$\varphi_{sc}(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}/2^k = 0_{\dot{2}} b_1 b_3 b_5 \ldots$$

である．同様に，

$$\psi_{sc}(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}/2^k = 0_{\dot{2}} b_2 b_4 b_6 \ldots$$

となり，よって，Γ への f_{sc} の制限が実際に (5.1.2) 式の写像に等しいことがわかる．□

これらの結果をまとめよう．

定理 (7.1)　(7.1.2) 式で定義された関数 $f_{sc} : \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ は，空間充填曲線を表す．これをシェーンベルク曲線と呼ぶ．

§7.2　シェーンベルク曲線のいたるところ微分不可能性

Γ への f_{sc} の制限が写像 (5.1.2) 式に等しく，また，写像 (5.1.2) 式がいたるところ微分不可能である（定理 5.1 を参照）ので，Γ へのシェーンベルク曲線の制限がいたるところ微分不可能であることがわかる．問題は，$\mathcal{I}$ の残りの部分で何が起こるかである．5.4 節では，ルベーグの空間充填曲線が Γ^c 上で微分可能であることを見てきた．本節では，シェーンベルク曲線がそうではないことを示そう．実際，シェーンベルク曲線は，$\mathcal{I}$ 上でいたるところ微分不可能である．J. -B. ヒリアート・ウルティは，'Le fait que f_{sc} ne soit nulle part differentiable est plus laborieux à prouve'（「f_{sc} がいたるところ微分不可能である事実は，証明が大変面倒である」 —— Hiriart-Urruty[1](p.230)）と述べている．最初の証明は，1981 年になって初めて現れた．J. アルシナによるこの証明は，実際に面倒であった (Alsina[1])．1 年後，シェーンベルクは，$0 < a < 1$，b が奇数，$ab > 1$ に対して，E が連続する整数間で $\cos(\pi t)$ を補間する線形オイラー・スプラインであるとき，関数 $\sum_{k=0}^{\infty} a^k E(b^k t)$ がいたるところ微分不可能であることの証明を発表した (Schoenberg[2])．彼は，ワイエルシュトラスのそのような関数の最初の例で，いたるところ微分不可能性の証明のルーディン版を用いて，これを証明した (Rudin[1], pp.125–127)．彼は，このことから $3\varphi_{sc}(t) + \psi_{sc}(t)$ がいたるところ微分不可能であることを演繹し，所望の結果を得た．しかし，その証明は，面倒で長いものとなった．1986 年，筆者は，基本的な証明を見いだし，それを発表した (Sagan[4])．以下では，この証明について述べる．

定理 (7.2)　(7.1.2) 式で定義されたシェーンベルク曲線は，いたるところ微分不可能である．

証明　$t = 0, t = 1$, そして $t \in (0,1)$ の 3 つの場合に分けなければならない．

(i) $t = 0$ の場合．$t_n = 1/9^n$ を選ぼう．

$$p(9^k/9^n) = \begin{cases} 0, & k < n \text{ のとき} \\ 1, & k \geq n \text{ のとき} \end{cases}$$

なので,

$$\varphi_{sc}(1/9^n) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^n$$

となり，よって，$n \to \infty$ のとき,

$$[\varphi_{sc}(1/9) - \varphi_{sc}(0)]/(1/9^n) = (9/2)^n \longrightarrow \infty$$

であることがわかる．すなわち，$\varphi'_{sc}(0)$ が存在しない．

(ii) $t = 1$ の場合．$t_n = 1 - 1/9^n$ として，前と同じ．

(iii) $t \in (0,1)$ としよう．$k_n = [9^n t]$ を選び，$a_n = k_n/9^n$, $b_n = a_n + 1/9^n$ としよう．n が十分に大きければ，t がある添え字 n から $a_n = t$ である場合の有限の 9 進数表現を持たない限り，$0 < a_n < t < b_n < 1$ であり，$\{a_n\} \to t$, $\{b_n\} \to t$ である．整数列 $\{k_n\}$ において，無限に多くあるのは偶整数，あるいは奇整数（あるいは両方）である．無限に多くあるのが偶整数と仮定し，2 重の添字を避けるため，偶整数のこの部分列を再び k_n としよう．(7.1.2) 式から,

$$\varphi_{sc}(a_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} p(9^k k_n/9^n)/2^k, \varphi_{sc}(b_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} p(9^k k_n/9^n + 9^k/9^n)/2^k$$

である．したがって,

$$\varphi_{sc}(b_n) - \varphi_{sc}(a_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[p(9^k k_n/9^n + 9^k/9^n) - p(9^k k_n/9^n)]/2^k$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}[p(9^k k_n/9^n + 9^k/9^n) - p(9^k k_n/9^n)]/2^k \triangleq S_1 + S_2 \qquad (7.2.1)$$

となる．$k < n$ であれば，$9^k/9^n \leq 1/9$ であり，S_1 に対する下位の推定値を得るため，可能なかぎり最悪の状態を仮定する．すなわち，$9^k k_n/9^n + 9^k/9^n$ と $9^k k_n/9^n$ の両方は，p が傾き -3 で減衰する区間に位置する（図 7.1 参照）．それから,

$$p(9^k k_n/9^n + 9^k/9^n) - p(9^k k_n/9^n) \geq -3(9^k/9^n)$$

である．したがって，

$$S_1 \geq -\frac{3}{9^n \cdot 2} \sum_{k=0}^{n-1} (9/2)^k = -\frac{3}{9^n \cdot 7}[(9/2)^n - 1] \qquad (7.2.2)$$

となる．$k \geq n$ ならば，$(9^k/9^n) \geq 1$ で奇数である．したがって，$(9^k/9^n)k_n$ が偶数となり，$9^k k_n/9^n + 9^k/9^n =$ 偶数 $+$ 奇数 $=$ 奇数となる．よって，

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} [p(\text{奇数}) - p(\text{偶数})]/2^k = \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} (1/2)^k = 1/2^n \qquad (7.2.3)$$

である．(7.2.1) 式，(7.2.2) 式，(7.2.3) 式から，$n \to \infty$ のとき，

$$[\varphi_{sc}(b_n) - \varphi_{sc}(a_n)]/(b_n - a_n) = 9^n(S_1 + S_2) \geq \frac{4}{7}\left(\frac{9}{2}\right)^n + \frac{3}{7} \longrightarrow \infty$$

を得る．すなわち，$\varphi'_{sc}(t)$ は存在しない（付録 A.2.2 を参照）．

列 $\{k_n\}$ において，無限に多くの要素が奇数であるとしよう．方策を逆にし，差商 (difference quotient) に対して上界を見つければよい．同様の推論により，$n \to \infty$ のとき，

$$[\varphi_{sc}(b_n) - \varphi_{sc}(a_n)]/(b_n - a_n) \leq -\frac{4}{7}\left(\frac{9}{2}\right)^n - \frac{3}{7} \longrightarrow -\infty \qquad (7.2.4)$$

である．

(7.1.2) 式によって $\psi_{sc}(t) = \varphi_{sc}(3t)$ なので，ψ_{sc} はいたるところ微分不可能である．□

定理 7.2 に関する系　Γ への f_{sc} の制限は，いたるところ微分不可能であり，Γ^c への制限も，いたるところ微分不可能である．

証明　カントール集合 Γ への f_{sc} の制限が，定理 5.1 より，いたるところ微分不可能である写像 (5.1.2) 式と等しいことを 7.1 節において見てきた．証明で残っていることは，Γ^c への f_{sc} の制限がいたるところ微分不可能とな

ることである．開集合の和集合である Γ^c が開集合であるので，また，φ_{sc} が $\mathcal{I}$ においていたるところ微分不可能であるので，あらゆる $t \in \Gamma^c$ に対して，$\lim_{n\to\infty}[\varphi_{sc}(t) - \varphi_{sc}(t_n)]/(t - t_n)$ が存在しないような $t_n \in \Gamma^c$ を持った列 $\{t_n\} \to t$ が存在する．同じ方法を ψ_{sc} に適用する． □

この系は，シェーンベルクが指摘した疑問に完全な解を与えるものである (Schoenberg[2], p.146, 注意 1)．

§7.3 近似多角形

前の使用例と合わせるため，Sagan[2] で紹介した記法で，節点 $f_{sc}(m/3^n)$（ただし，$m = 0, 1, 2, \ldots, 3^n$）をつなぐ多角線を，**シェーンベルク曲線の n 次近似多角形**と呼ぶ．有限で数多くの演算によって，節点の正確な座標を見つけることができる．これは，次のようにして見つけられる．

$$t_{m,n} = m/3^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots; m = 0, 1, 2, \ldots, 3^n$$

としよう．(7.1.1) 式から，すべての $j \geq n$ に対して，

$$p(3^j t_{m,n}) = p(m) = m - 2[m/2]$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\varphi_{sc}(t_{m,n}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]} p(3^{2k} t_{m,n})/2^k + \frac{1}{2}\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} p(m)/2^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]} p(3^{2k} t_{m,n})/2^k + (m - 2[m/2])/2^{[n/2]+1} \\
\psi_{sc}(t_{m,n}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]} p(3^{2k+1} t_{m,n})/2^k + \frac{1}{2}\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} p(m)/2^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]} p(3^{2k+1} t_{m,n})/2^k + (m - 2[m/2])/2^{[n/2]+1}
\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

である．$f_{sc}(t_{m,n})$ がわかっているので，シェーンベルク曲線の n 次近似多角形を次のように定義しよう．すべての $t \in [t_{m,n}, t_{m+1,n}]$（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1$）に対して，

$$s_n(t) = 3^n(f_{sc}(t_{n,m+1}) - f_{sc}(t_{n,m}))(t - t_{n,m}) + f_{sc}(t_{n,m}) \tag{7.3.2}$$

とする．(7.3.1) 式と (7.3.2) 式から，$s_n(t)$ の最初の要素 $\sigma_n(t)$ は，

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[3^n(p(3^{2k}t_{m+1,n}) - p(3^{2k}t_{m,n}))(t - t_{m,n}) + p(3^{2k}t_{m,n})]/2^k$$

となる．$\{\sigma_n(t)\}$ が一様に $\mathcal{I}$ 上の $\varphi_{sc}(t)$ に収束することを示そう．$2k < n$ のとき，$3^{2k}/3^n \leq 1/3$ となることに注意されたい．したがって，$p(3^{2k}t)$ は，始点 $(t_{m,n}, p(3^{2k}t_{m,n}))$ から終点 $(t_{m+1,n}, p(3^{2k}t_{m+1,n}))$ までの直線によって，区間 $[t_{m,n}, t_{m+1,n}]$ 上で表されている．すなわち，

$$p(3^{2k}t) = 3^n(p(3^{2k}t_{m+1,n}) - p(3^{2k}t_{m,n}))(t - t_{m,n}) + p(3^{2k}t_{m,n})$$

であり，したがって，

$$\begin{aligned}|\sigma_n(t) - \varphi_{sc}(t)| &= \left|\frac{1}{2}\sum_{k=[n/2]}^{\infty} 3^n(p(3^{2k}t_{m+1,n}) - p(3^{2k}t_{m,n}))(t - t_{m,n})\right.\\ &\qquad \left. + p(3^{2k}t_{m,n}) - p(3^{2k}t)]/2^k\right|\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=[n/2]}^{\infty}[3^n|p(3^{2k}t_{m+1,n}) - p(3^{2k}t_{m,n})||t - t_{m,n}|\\ &\qquad + |p(3^{2k}t_{m,n})| + |p(3^{2k}t)|]/2^k.\end{aligned}$$

を得る．$0 \leq p(t) \leq 1$ なので，$|p(3^{2k}t_{m+1,n}) - p(3^{2k}t_{m,n})| \leq 1$ となり，また，$t \in [t_{m,n}, t_{m+1,n}]$ なので，$|t - t_{m,n}| \leq 1/3^n$ となる．したがって，

$$|\sigma_n(t) - \varphi_{sc}(t)| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=[n/2]}^{\infty} 3/2^k = 3/2^{[n/2]} \tag{7.3.3}$$

であり，$\mathcal{I}$ 上で一様に $\{\sigma_n(t)\} \to \varphi_{sc}(t)$ となる．同じ導出によって，$s_n(t)$ の第2要素に対しても同じ結果を得る．実際に $\mathcal{I}$ 上で一様に $\{s_n(t)\} \to f_{sc}(t)$

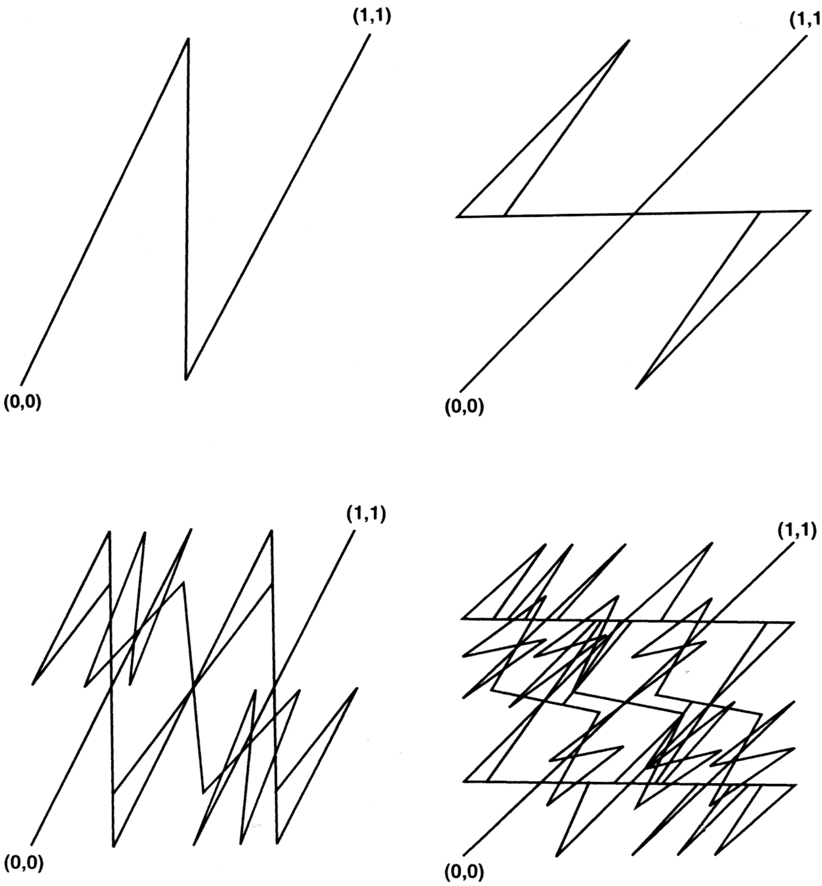


図 7.3.1　$n=1,2,3,4$ に対する近似多角形 s_n

であることがわかる．第 1 次，第 2 次，第 3 次，第 4 次の近似多角形は，付録 A.1.4 のコンピュータ・プログラム 4 によって作られ，図 7.3.1 に描かれている．

逆に，Alsina [1] は，次の要素 α_n, β_n

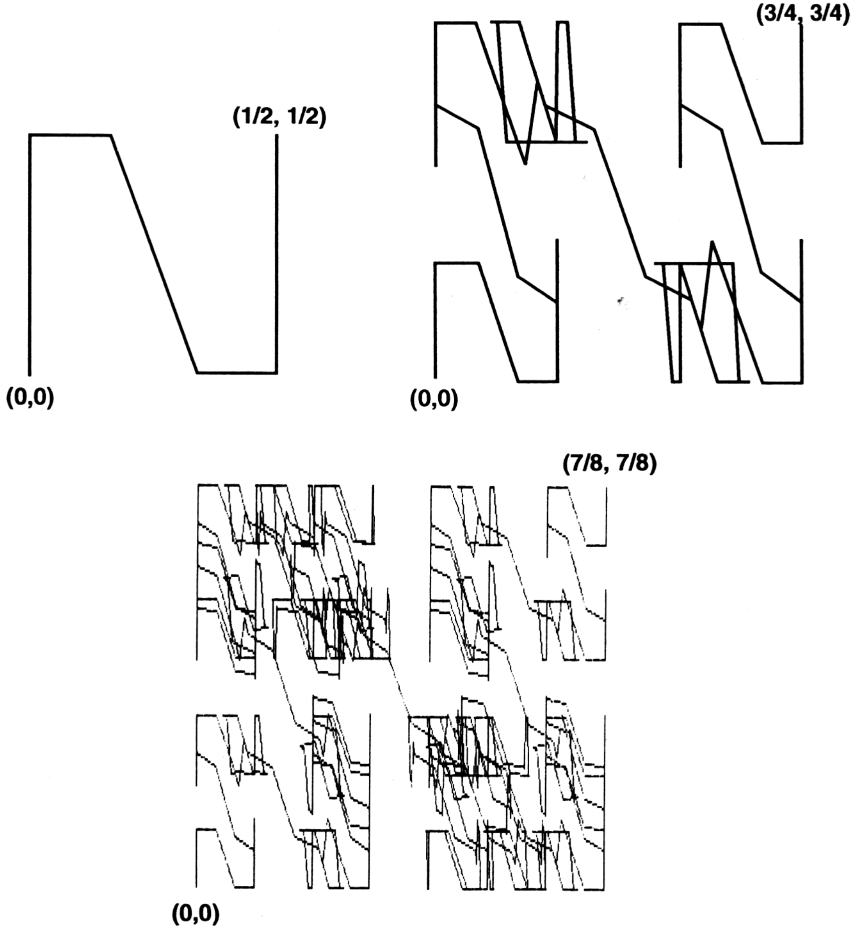


図 7.3.2　$n = 1, 2, 3$ に対する近似多角形 a_n

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} p(3^{2k}t)/2^k, \beta_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} p(3^{2k+1}t)/2^k \qquad (7.3.4)$$

を持った多角形の列 a_n を考えた．(7.1.2) 式から，

$$|\varphi_{sc}(t) - \alpha_n(t)| \leq 1/2^n,\ |\psi_{sc}(t) - \beta_n(t)| \leq 1/2^n \qquad (7.3.5)$$

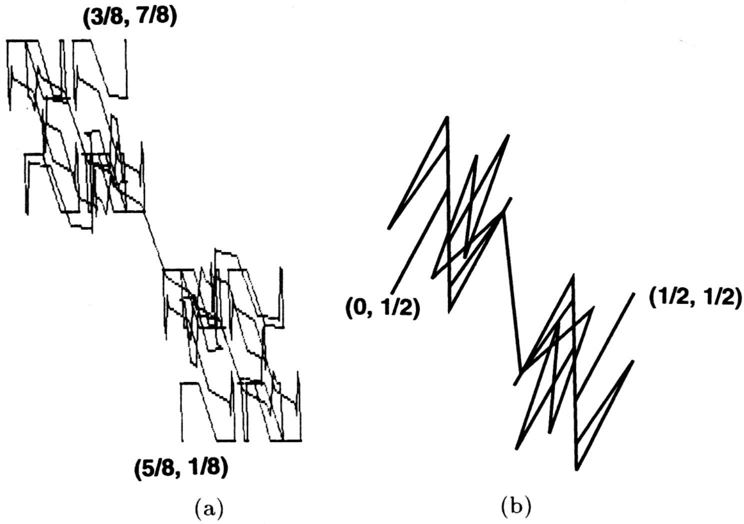


図 7.3.3 結合線に対する近似

となり，また，(7.3.4) 式の多角形がシェーンベルク曲線を一様に近似することがわかる．それゆえ，それらを**近似多角形** (approximating polygon) というのである．近似多角形 a_n は，$n = 1, 2, 3$ に対して，図 7.3.2 に描かれている．これらの多角形は，付録 A.1.4 のコンピュータ・プログラムによって作られた．

ルベーグの空間充填曲線は，線形補間によって，写像 (5.1.2) 式から（第 5 章において）得られた．これは，Γ^c を作る区間上の結合線が直線であるという意味である（図 5.5.3 も参照）．シェーンベルク曲線がいたるところ微分不可能であるので，大変複雑な結合線を必要とし，このことが厳密に起こっているのである．図 7.3.3(a) において，区間 $[1/3, 2/3]$ 内の結合線に対する a_3 近似を描き，図 7.3.3(b) では，区間 $[1/9, 2/9]$ 上の結合線に対する s_5 近似を描いている．$[1/9, 2/9]$ 上の結合線に対する s_5 近似は，結合線と同じように，節点 (1/2, 1/2) から節点 $(0, 1/2)$ へつなぐことに注意されたい．しかしながら，$[1/3, 2/3]$ 上での結合線に対する a_3 近似は，結合線と異なり，節点

(1/2,1) から節点 (1/2,0) へつながず，むしろ，第1節点の近似 (3/8,7/8) から第2節点の近似 (5/8,1/8) までをつないでいる．

この節を終える前に，(シェーンベルクの) ペアノ曲線に対する近似多角形の族に関する E. ラフカの最近の論文を示しておこう (Hlawka[1])．ここで，彼は，必要な (2次元) シェーンベルク曲線の多くの点を作るために一様分布の理論を使い，これがいかに方程式の近似解を見つけるのに使われるかを示し，ブラウン運動に適用される特異測度 (singular measure) を使って，一様分布の新たな理論を発展させた．

§7.4 3次元シェーンベルク曲線

シェーンベルクは，生成関数 p (図 7.1.1 を参照) によって，次のように3次元曲線を定義している．すなわち，$0 \leq t \leq 1$ に対して，

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} p(3^{3k}t)/2^k \\ \eta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} p(3^{3k+1}t)/2^k \\ \zeta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} p(3^{3k+2}t)/2^k \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

である (Schoenberg[2])．級数が一様に収束し[2]，すべての項が連続であるので，その写像は連続である．7.1節のように，Γ へのこの写像の制限が (5.1.3) 式と等しく，したがって，その写像が $\mathcal{W}$ 上で全射であることを示すことができる．それもいたるところ微分不可能である．

§7.5 $\aleph_0$ 次元シェーンベルク曲線

シェルピンスキーは，$\aleph_0$ 次元シェーンベルク曲線の次の作り方を，日本の数学者，井関清志に帰している (Sierpiński[10], p.78)．

---

2 ［訳註］一様収束については，付録 A.2.4 を参照．

p を (7.1.1) 式において定義されているとし，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(3^{2^{n-1}(2k-1)-1} t)/2^k \tag{7.5.1}$$

とする．連続関数の一様収束級数によって表されるこれらの関数は，連続である．$0 \leq p(t) \leq 1$ となるので，$0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$ を得る．

$$\xi_n = \varphi_n(t),\ t \in \mathcal{I},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

が $\aleph_0$ 次元の空間充填曲線を表すことを示すため，任意の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \ldots$ に対して，

$$\varphi_n(t) = \alpha_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ のとき}$$

であるような，ある $t \in \mathcal{I}$ が存在することを示す必要がある．ここで，$\alpha_n = 0_{\dot{2}} \alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(2)} \alpha_n^{(3)} \ldots$，$\alpha_n^{(k)} = 0$ または 1 とし，また，$t_{2^{n-1}(2k-1)} = \alpha_n^{(k)}$ としよう．

さがしている t の値が

$$t = 2 \sum_{m=1}^{\infty} t_m / 3^m$$

であることを示そう．$q = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$3^q t = 2 \sum_{m=1}^{\infty} 3^q t_m / 3^m = 2N(q) + (2/3) t_{q+1} + (2/3^2) t_{q+2} + \cdots \tag{7.5.2}$$

であることがわかる．ここで，$N(q)$ はある整数であり，q に従属である．

$t_{q+1} = 0$ ならば，(7.5.2) 式から

$$0 \leq 3^q t - 2N(q) \leq (2/3^2) + (2/3^3) + \cdots = 1/3$$

であり，したがって，(7.1.1) 式によって，

$$p(3^q t) = p(3^q t - 2N(q)) = 0 = t_{q+1}$$

であることがわかる．$t_{q+1} = 1$ ならば，再び (7.5.2) 式から，

$$3^q t - 2N(q) = (2/3) + (2/3^2)t_{q+2} + \cdots$$

となり，したがって，

$$\begin{aligned} 2/3 &= 3^q t - 2N(q) - (2/3^2)t_{p+2} + \cdots \leq 3^q t - 2N(q) \\ &\leq 2/3 + (2/3^2) + \cdots = 1 \end{aligned}$$

を得る．(7.1.1) 式から，

$$p(3^q t) = 1 = t_{q+1}$$

となる．よって，

$$p(3^q t) = t_{q+1} \quad \text{for } q = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

を得る．ゆえに，

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{2^{n-1}(2k-1)}/2^k = \alpha_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ のとき}$$

である． □

以上は，$\aleph_0$ 次元の単位立方体がカージナル数 $\mathfrak{c}$ を持つことの構成的証明を与えている．(6.9 節も参照.)

§7.6　問題

1. シェーンベルクの空間充填曲線の定義式 (7.1.2) を使って，$t = 1/9, 2/9, 1/3, 2/3, 5/9$ での f_{sc} の値を求め，また，(5.1.2) 式に対する読者の結果を確めなさい．
2. $3\varphi_{sc} + \psi_{sc}$ が $\mathcal{I}$ 上でいたるところ微分不可能であるならば，φ_{sc} と ψ_{sc} は，$\mathcal{I}$ 上でいたるところ微分不可能であることを示しなさい．
3. シェーンベルク曲線が $t = 1$ において微分可能でないことを証明しなさい．
4. $k_n = [9^n t]$（ただし，$t \in (0,1)$）と $a_n = k_n/9^n$, $b_n = a_n + 1/9^n$ に関して，十分に大きな n に対して，$0 < a_n < t < b_n < 1$ であり，$n \to \infty$

のとき，t がある添字 n から $a_n = t$ の場合の有限 9 進表現を持たない限り，$\{a_n\} \to t$ と $\{b_n\} \to t$ であることを示しなさい．

5. (7.2.4) 式の検証をするため，その詳細を示しなさい．
6. すべての整数 m に対して，p が (7.1.1) 式で定義されているとき，$p(m) = m - 2[m/2]$ であることを示しなさい．
7. (7.3.3) 式と (7.3.5) 式の推定から，a_n 多角形が s_n 多角形より速くシェーンベルク曲線に近づくことを見てきた．これは本当だろうか？　読者の答えを確かめなさい．
8.

$$\left.\begin{array}{c} x = (t + 1 - \psi_{sc}(t))/2 \\ y = 1 - \varphi_{sc}(t) \end{array}\right\}, \quad t \in [0,1]$$

が区間 $[1/3, 2/3]$ に関するシェーンベルク曲線を表していることを示しなさい．

9.

$$\left.\begin{array}{c} x = 1 - \varphi_{sc}(t)/2 \\ y = (t + 1 - \psi_{sc}(t))/2 \end{array}\right\}, \quad t \in [0,1]$$

が区間 $[7/9, 8/9]$ に関するシェーンベルク曲線を表していることを示しなさい．

10. 区間 $[1/9, 2/9]$ と $[1/27, 2/27]$ に関して，問題 8，9 の表現と同様の表現を見つけなさい．
11. シェーンベルク曲線は，区間 $[1/3, 2/3]$，$[1/9, 2/9]$，$[7/9, 8/9]$，などなどに関して空間充填するか？
12. Γ への 3 次元シェーンベルク曲線 (7.4.1) 式の制限が写像 (5.1.3) 式と等しいことを示しなさい．
13. (7.4.1) 式の 3 次元シェーンベルク曲線がいたるところ微分不可能であることを証明しなさい．
14. (7.5.1) 式で定義されている $\varphi_n(t)$ に関して，(a) すべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\varphi_n(t) = 1$，(b) すべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\varphi_n(t) = 0$，(c) すべての $n \neq j$ に対して $\varphi_j(t) = 1, \varphi_n(t) = 0$，(d) すべての $n \neq j$ に対して $\varphi_j(t) = 0, \varphi_n(t) = 1$，となるそれぞれの場合の t の値を見つけなさい．

15. $m = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$2^{n-1}(2k-1) = m$ が整数解 n, k を持つことを示しなさい．

第 8 章　正のルベーグ測度を持つジョルダン曲線

§8.1　ジョルダン曲線

ネットの定理（定理 6.4）から，曲線自身が交わらない（あるいは接しない）平面曲線が空間充填でないことがわかる．この章では，そのような曲線が正の 2 次元ルベーグ測度を持つことが可能であることを示そう．

カミーユ・ジョルダン自身は，『解析学教程 (*Course d'Analyse*)』(Jordan[1], p.90) において，曲線を本書の定義 1.3.2 のように定義し，3 回の改訂を通してその定義を固守したが，多くの著者は，重複点を持たない曲線を**ジョルダン曲線** (Jordan curve) として参照した．(第 3 版の翻刻本は，1959 年にようやく再刊された.) 彼は，重複点なしの閉曲線が平面を内側と外側に分割することを証明しようとした．現在，これは，ジョルダンの定理として知られており，このことが，**ジョルダン曲線**という用語を重複点なしの連続曲線に用いるようになった理由と考えられる．O. ヴェブレンは，ジョルタンの証明について言わなければならないことがあった．それは,「簡単な多角形とその点からの議論の重要かつ特殊な場合で，証明なしの定理を仮定しており，詳細な全容が与えられないのにとにかく容認しなければならない」ということである (Veblen[2], p.83)．W. F. オズグッドが気づいたように，「この定理は，多角形のみに対して明らかでない．なぜならば，多角形の大幅に制限された類にだけ明らかに成り立つ概念をもっているからである」('Allein für die Polygone ist der Satz schon nicht mehr anschaulich, denn man kann sich ja nur von einer äußerst beschränkten Klasse von Polygonen eine

deutliche Vorstellung machen') —— Osgood[3](p.171). 1904年には，ヴェブレンは，幾何の公理系に関する論文を発表した (Veblen[1]). この公理は，偶然に，位数 (order) と接続 (connection) のヒルベルトの公理と等価である (Hilbert[2]). また，1年後，彼は，これらの公理に基づいて，ジョルダンの定理が重複点なしの閉多角形において成り立つことを証明した (Veblen[2]). 次に，ハーンは，ヴェブレンの証明が「束縛していない (not binding)」ことを見つけ，彼自身の証明を与えようとした (Hahn[8]). いかなることがあっても，この定理は，証明されるべきものである．

ジョルダンは，彼の『解析学教程』の 102 ページにおいて，長さのある (rectifiable) 曲線が2次元容量0を持つことを証明している．彼の議論は，簡単でわかりやすかった．曲線 $\mathcal{C}$ が長さ L を持つとしよう．平面を辺長 L/n の正方格子 (square grid) に分割し，曲線を等長 L/n の n 個の部分に分割しよう．各部分は，せいぜい4つの正方格子を通過し，したがって，$n \to \infty$ のとき，$J_2(\mathcal{C}) < 4L^2/n \to 0$ となる．そのとき，ある不思議なことが起こった．1893年の『解析学教程』の初版の1年後，彼は，*l'Intermediaire des Mathematiciens* (翻訳すると，数学者の掲示板 (The mathematicians' bulletin board) である）の第1巻 (1894)，23 ページ (Jordan[2]) において，連続曲線の面積が不定 (indeterminate) ではないのではないかと（文化的に開けた）世界の数学者に尋ねた ('Pourrait-on signaler une courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ (f et φ étant des fonctions continues) dont l'aire fût indéterminée ?[1]'). 0/0 という形式 (form) に関連して同じ用語 indeterminée を使ったが，彼がこれによって何を意味しているのかがあまりはっきりしない．とにかく，特にペアノの論文とヒルベルトの論文が 1890 年と 1891 年に発表されていたのに，ジョルダンが空間充填曲線の存在をまだ知らなかったことは驚きである．1896 年には，ペアノが彼自身の空間充填曲線を参照して，*l'Intermediaire des Mathematiciens* の第3巻において答えを出した (Peano[2], p.39).

最初に単射性を曲線の定義に導入したのは，A. フルヴィッツであった．コーシーの積分定理に許容できる積分路をとりわけ扱った第1回国際数学者会議 (First International Congress of Mathematicians) でのプログラム基調講

1　［訳註］「面積が不定となる一曲線 $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ が見つけられるか？(ただし，f と φ は，連続関数である.)」

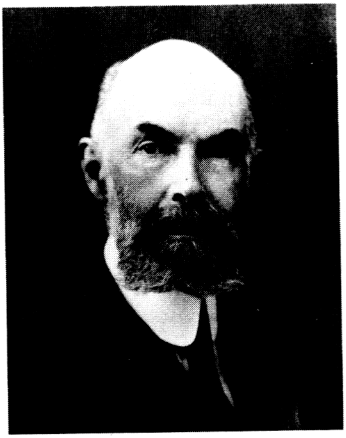
演において (Hurwitz[1])，彼は，連続曲線の概念が，ペアノとヒルベルトの例の考察において，曲線に対する人々の認識と合わないことを指摘しながら，正方形の境界から曲線上への連続 1 対 1 写像の像として，簡単な閉連続曲線の概念を 102 ページに紹介した.（当時，フルヴィッツがまだジョルダンの曲線定理のジョルダンによる証明の妥当性を信じていたことは，注目すべきである．偶然に，ジョルダンはその会議に出席していなかったが，ペアノはいた）．閉でない簡単な曲線の場合にフルヴィッツの表記を適用し，次の定義を与えよう．

定義 (8.1) $\mathcal{C}$ は，連続単射写像 $f:\mathcal{I}\to\mathbb{E}^n$ の像であるならば，ジョルダン曲線（あるいは簡単な連続曲線）と呼ばれる．

本章では，f が連続かつ単射である $f:\mathcal{I}\to\mathcal{Q}$ （あるいは $\mathcal{T}$）によって表され，$\Lambda_2(f_*(\mathcal{I}))>0$ であるジョルダン曲線のいくつかの例を示そう．実際，0 と 1 の間の任意に与えられた数に対して，その数に等しい 2 次元ルベーグ測度を持った 1 つのジョルダン曲線を作る．

§8.2 正の測度をもつオズグッドのジョルダン曲線

正の 2 次元ルベーグ測度のジョルダン曲線を見つける問題は，今世紀の初めに，かなりの影響を与え，独創的な解法を生んだ．しかし，それは，今世紀もだんだん終わりに近づいて，ほとんど忘れ去られてしまった．1982 年には，F. バートンが正の 2 次元ルベーグ測度のジョルダン曲線の存在に関して，*American Mathematical Monthly* (Vol.89, No.10, Dec. 1982, p.756, E2975) に質問を掲載したのである．4 年後に，1 つの応答が，質問者に Gelbaum and Olmsted[1] を参照するように返ってきた (*American Mathematical Monthly*, Vol.93, No.7, July-August 1986, p.569)．ゲルバウムとオルムステッドは，そのような曲線の最初の発見者として W. F. オズグッドを参照している．オズグッド曲線は，この節で取り扱う．



ウィリアム・フォグ・オズグッド(1864–1943)は，ボストンに生まれ，マサチューセッツ州ベルモントに歿した．B. O. パースとF. N. コールの指導の下，ハーバード大学で学び，1886年にクラスで第2位の成績で卒業した．修士研究に1年を残して，1887年に修士号を取得した．同年，ゲッティンゲン大学に行き，そこで，F. クラインの指導の下で研究を行なった．そこからエルランゲン大学に移り，そこで，1889年に博士号を取得した．1890年にハーバード大学に戻り，1933年までそこで教鞭をとった．M. ボッシャーが教室に加わった1891年まで，オズグッドは，ハーバード大学で唯一の研究志向の数学者であった．1933年の退職後，北京大学で2年間教えた．北京において，彼は，1886年のハーバード大学の教室の秘書宛に，1934年,「ここの優等生は，ハーバードの優等生と同じくらい上位に位置づけられており，有望である」と手紙を書いた．オズグッドは，複素関数論，微分方程式，変分法への貢献で知られている．(より詳しくは，Walsh[1]を参照.)

オズグッドの先駆的な論文において，彼は,「単連結領域の境界点すべてがその領域全体に存在する曲線にそって近づくことができるその単連結領域の境界に対して，いくつかの可能性の考察を通して，曲線（正の2次元ルベーグ測度を持ったジョルダン曲線）の作り方に導かれた」と述べている．(Osgood[2]. これが成り立たない単連結領域に対しては，Osgood[1] を参照.)

読者は，その作り方が疑いもなく，3年早く発表されたペアノ曲線の幾何的生成法の影響を受けたことがわかるであろう (Moore[1]).

正の2次元ルベーグ測度を持ったジョルダン曲線の族のオズグッドの作り方は，まず，単位正方形から始め，図8.2.1に最初の2ステップを示しているように，正方形から（水平と垂直の棒よりなる）開いた鉄格子状の領域を逐次除去することにある．遮られた閉正方形は，各ステップ後に残ったものである．各正方形は，図8.2.1において太線分で示された「結合線」によって連結されている．任意の $\lambda \in (0,1)$ に対して，2次元ルベーグ測度 λ の曲線を作るため，その面積の総和が $1-\lambda$ であるように鉄格子状の領域を選

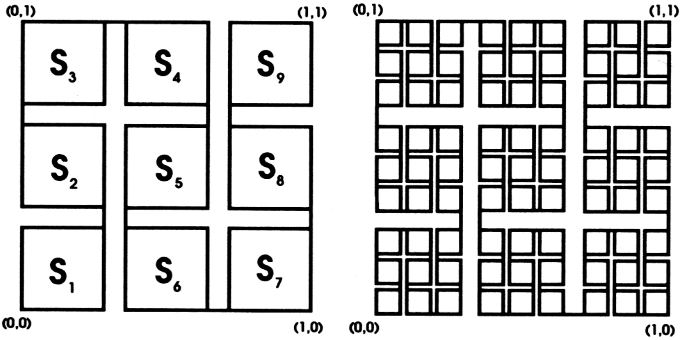


図 8.2.1　オズグッドの作図

ぶ．これは，次のようにして実現される．第1ステップにおいて，棒の幅を $(1-\sqrt{\lambda})/4$ となるように選ぶ．次のステップにおいて，$(1-\sqrt{\lambda})/24$ となるように選び，また，その次のステップにおいて，$(1-\sqrt{\lambda})/144$ となるように選ぶ，などなどである．

$\mathcal{A}_n(\lambda)$ を，n ステップ後に残された 9^n 個の閉正方形と 9^n-1 個の結合線からなる領域としよう．このとき，$J_2(\mathcal{A}_n)=[1-(1-\sqrt{\lambda})(1-1/2^n)]^2=[\sqrt{\lambda}+(1-\sqrt{\lambda})/2^n]^2$ であり，したがって，無限回のステップ後に得られる集合 $\mathcal{C}(\lambda)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n(\lambda)$ は，2次元ルベーグ測度 $\Lambda_2(\mathcal{C}(\lambda))=\lim_{n\to\infty}J_2(\mathcal{A}_n(\lambda))=\lambda>0$ を持つ（付録 A.2.5 を参照）．

$\mathcal{C}(\lambda)$ がジョルダン曲線であることを示すため，まず，それをパラメータ化する．そのために，カントール型集合 Γ_8 を次のようにして作り出す．区間 $\mathcal{I}$ から8個の開区間 $((2k-1)/17, 2k/17)$（ただし，$k=1,2,3,\ldots,8$）を取り除き，長さ $1/17$ の9個の閉区間 $[2k/17,(2k+1)/17]$（ただし，$k=0,1,2,\ldots,8$）を残す．これらの9個の閉区間の和集合を Γ_8^1 とする．次に，残っている各閉区間から長さ $1/17^2$ の8個の開区間を取り除き，長さ $1/17^2$ の総数81個の閉区間を残す．これらの和集合を Γ_8^2 とする，などなどである．$\Gamma_8=\bigcap_{j=1}^{\infty}\Gamma_8^j(\lambda)$ は，カントール型の集合であり，その各点は集積点である．それは，取り除かれた区間の1つにおいて左端点であれば，右集積点であり，あるいは，取り除かれた区間の1つにおいて右端点であれば，左集積点であり，あるいは，両側の集積

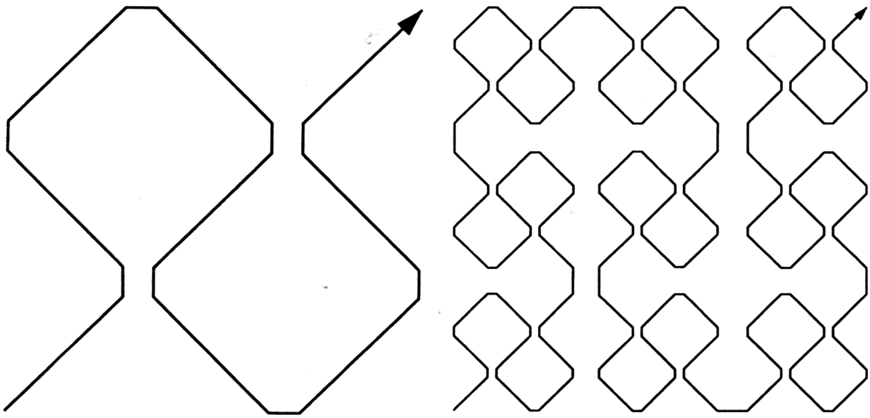


図 8.2.2　オズグッドの曲線に対する近似多角形

点である．今，$\mathcal{C}(\lambda)$ を次のようにパラメータ化しよう．$((2k-1)/17,\ 2k/17)$ を，線形に S_k から S_{k+1}（ただし，$k=1,2,3,\dots,8$）までの（端点のない）結合線へ写像する（図 8.2.1 を参照）．残りの閉区間 $[2k/17,(2k+1)/17]$ は，正方形 S_{k+1}（ただし，$k=0,1,2,\dots,8$）に写像される．これらの各正方形内においてこの操作を繰り返し，次に，その正方形内の各正方形内においてこの操作を繰り返し，などなどとこの操作を無限回繰り返す．この写像が連続であることは，（ルベーグの空間充填曲線の連続性を扱った）定理 5.4.1 の証明をその新たな状況に適用することによって示されるが，読者に演習問題として残そう．連続性を示すより簡単な方法は，図 8.2.2 に示されたように，結合線と，正方形への入口点を出口点につなぐ正方形の対角線からなる近似多角形を考えることである．これらの近似多角形の列は，オズグッド曲線に一様に収束する．したがって，それは連続である．

写像が単射であることは，次のようにしてわかる．

$\mathcal{C}(\lambda)$ 上の任意の点は，結合線上に存在するか否かのいずれかである．もし存在するならば，作図によって，Γ_8 を作る上で除かれた開区間の 1 つに唯一の前像が存在する．もし存在しないならば，正方形 S_j の 1 つにあり，次に，S_j の部分正方形の 1 つにあり，さらに，S_j の部分正方形の部分正方形の 1

つにあり，などなどである．要するに，同時にそれが同じ分割の 2 つの正方形内に存在できるか否かである．よって，その点は，1 点に縮小する唯一の縮小閉正方形列によって定義される．それは，1 点に縮小する唯一の縮小閉区間列に順に対応し（Γ_8^1 に属する 1 番目の点，Γ_8^2 に属する 2 番目の点，などなどである），Γ_8 内の要素を一意に定める．

次に結果を整理しよう．

定理 (8.2)　任意の与えられた $\lambda \in (0,1)$ に対して，$\mathcal{C}(\lambda) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j(\lambda)$ は，図 8.2.1 に最初の 2 ステップが示されているように，ジョルダン曲線の軌跡であり，$\Lambda_2(\mathcal{C}(\lambda)) = \lambda$ である．ここで，$\mathcal{A}_n(\lambda)$ は，n 回連続の鉄格子状の領域の除去（その棒は，幅 $(1-\sqrt{\lambda})/4, (1-\sqrt{\lambda})/24, (1-\sqrt{\lambda})/144, \ldots$ を持っている）後に残った（全面積 $J_2(\mathcal{A}_n(\lambda)) = (\sqrt{\lambda}+(1-\sqrt{\lambda})/2^n)^2$ を持った）正方形と結合線の和集合を表す．

この過程は，好きなように（含む正方形の面積が）1 に近い 2 次元ルベーグ測度を持ったジョルダン曲線を生成したり，一方，好きなように 0 に近い 2 次元ルベーグ測度のジョルダン曲線を生成することに注意されたい．$\lambda = 0$ を選ぶ場合，2 次元ルベーグ測度 0 のジョルダン曲線を得る．$\lambda \to 1$ とするならば，その対応するジョルダン曲線は，ペアノ曲線になる（図 8.2.1 を図 3.3.2 と比較）．極限において正方形が接触し，曲線上のある点が 1 個以上の正方形に属するので，単射性は失われる．したがって，1 個以上の前像を持つ．（オズグッド曲線の洗練された記述は，Beck, Bleicher, and Crowe[1], pp.201–209 を参照．）

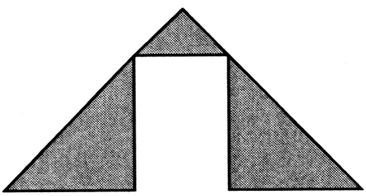
正の n 次元ルベーグ測度を持った $\mathbb{E}^n$ 内のジョルダン曲線は，**オズグッド曲線** (Osgood curve) としてよく参照される．

§8.3　シェルピンスキーとクノップのオズグッド曲線

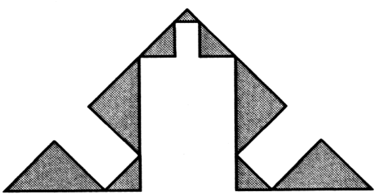
クノップは，オズグッドの生成法にもっともな批判を浴びせた（Knopp[1], 109 ページ, 脚注 2).「結合線」の存在により，オズグッドの曲線のあらゆる

部分がそれ自身オズグッド曲線ではなくなっている，これが，クノップが批判したことである．そこで，彼は，この欠点がない曲線を作ろうとした．しかし，その前に，シェルピンスキーは，各部分が再びオズグッド曲線であるような性質のオズグッド曲線をすでに得ていたのである．クノップはシェルピンスキーの生成法を複雑すぎると（同じ脚註で）退けたが，結合線の必要性を除くという必須となる手段を講じて，「氷を割った (broke the ice)」のは，シェルピンスキーだったので，これを簡単に概観する．

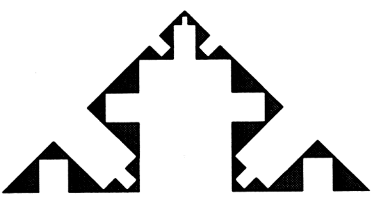
シェルピンスキーは，長さ ≤ 1 の斜辺を持つ直角二等辺三角形 $\mathcal{T}$ から始めた．それから彼は，図 8.3.1(a) に示されるように面積 $[J_2(\mathcal{T})]^2$ の開長方形を取り除き，3 個の陰影の閉三角形 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ を残した．次に，陰影の各三角形から面積 $[J_2(\mathcal{T}_0)]^2, [J_2(\mathcal{T}_1)]^2, [J_2(\mathcal{T}_2)]^2$ の開長方形を取り除き，図 8.3.1(b) の 9 個の閉三角形 $\mathcal{T}_{00}, \mathcal{T}_{01}, \mathcal{T}_{02}, \ldots, \mathcal{T}_{22}$ を残した，などなどである．(次のステップは，図 8.3.1(c) に示されている)．これらすべての陰影部分の集合の共通部分が，正の 2 次元ルベーグ測度を持ったジョルダン曲線であることがわかる (Sierpiński[3])．



(a)



(b)



(c)

図 8.3.1　シェルピンスキーのオズグッド曲線の生成

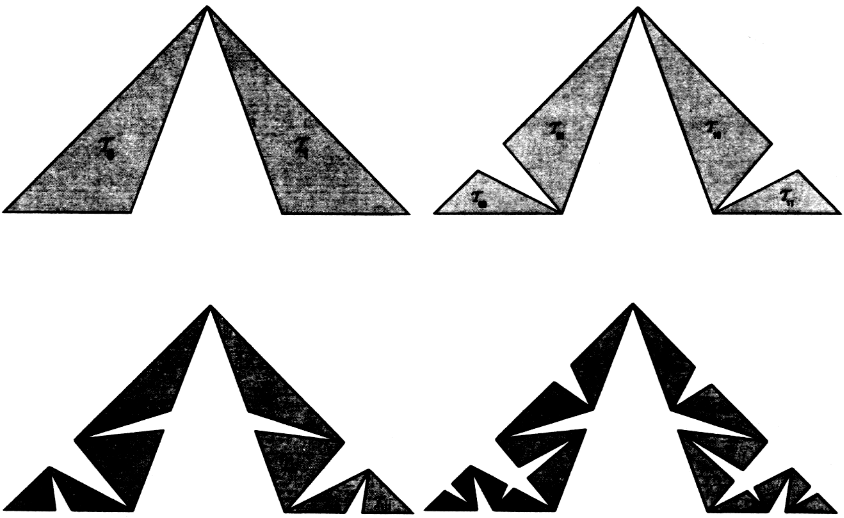


図 8.3.2 クノップのオズグッド曲線の生成

「複雑すぎる (too complicated)」うえに，シェルピンスキーのオズグッド曲線は，固定した初期三角形に対して，ルベーグ測度がオズグッドの例の場合のように調整できないという付加的欠点を持つ．しかし，頂点につながる三角形の利用が「結合線」の必要をいかに省いているかがわかる．

クノップは，その考え方をまとめたが，各ステップで長方形を取り除く代わりに，三角形を取り除き，任意の $\lambda \in (0,1)$ に対して，正の 2 次元ルベーグ測度 λ のジョルダン曲線を得ることができる次の簡単な生成法を考案した (Knopp[1])．

三角形 $\mathcal{T}$（直角二等辺三角形である必要はない）から始まって，$r_1 \in (0,1)$ である面積 $r_1 J_2(\mathcal{T})$ の開三角形を取り除き，合わせた面積 $J_2(\mathcal{T})(1-r_1)$ の 2 個の閉三角形 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ が残る．(図 8.3.2 を参照)．$\mathcal{T}_0$ から面積 $r_2 J_2(\mathcal{T}_0)$ の開三角形を取り除き，$\mathcal{T}_1$ から，ある $r_2 \in (0,1)$ に対して，面積 $r_2 J_2(\mathcal{T}_1)$ の開三角形を取り除いた．合わせた面積 $J_2(\mathcal{T})(1-r_1)(1-r_2)$ を持った 4 個の閉三角形 $\mathcal{T}_{00}, \mathcal{T}_{01}, \mathcal{T}_{10}, \mathcal{T}_{11}$ が残り，この処理を無限に繰り返す．極限において，彼は，2 次元ルベーグ測度

$$\Lambda_2(\mathcal{C}) = J_2(\mathcal{T}) \prod_{j=1}^{\infty}(1 - r_j) \tag{8.3.1}$$

を持った点集合

$$\mathcal{C} = (\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1) \cap (\mathcal{T}_{00} \cup \mathcal{T}_{01} \cup \mathcal{T}_{10} \cup \mathcal{T}_{11}) \cap \dots$$

を得たのである．$\sum_{j=1}^{\infty} r_j$ が収束するように r_j が選ばれるならば，$\Lambda_2(\mathcal{C}) > 0$ となる（付録 A.2.7）．各ステップで，取り除かれる三角形が賢明に配置されるならば，残った三角形のすべての次元が 0 に向かい，三角形自身が点に縮小する．クノップが記しているように，たとえば，鈍角三角形から始まり，各ステップで残りの角が再び鈍角であるように三角形を切るが，初期三角形の角を越えない鈍角で始まるならば，これは保証される．α が初期三角形で最小角であり，c がその底辺（鈍角の反対の辺）の長さであるならば，すべての三角形のすべての角は，α より大か等しくなり，生成の n 番目ステップですべての三角形の底辺は，n が ∞ のとき 0 に近づく $c\cos^n\alpha$ を越えることができない (Knopp[1])．

初期三角形 $\mathcal{T}$ として，長さ 2 の底辺を持った直角二等辺三角形を選び（したがって，$J_2(\mathcal{T}) = 1$），$r \in (0,1)$ に対して，$r_j = r^2/j^2$ となるならば，

$$\Lambda_2(\mathcal{C}) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - r^2/j^2)$$

を得る．ワイエルシュトラスの分解定理 (Osgood[3], p.555) から，

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{j=1}^{\infty}(1 - z^2/j^2)$$

である．したがって，

$$\Lambda_2(\mathcal{C}) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - r^2/j^2) = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \tag{8.3.2}$$

となる．任意の $\lambda \in (0,1)$ に対して，$\frac{\sin(\pi r)}{\pi r} = \lambda$ が解 $r \in (0,1)$ を持つ．したがって，r の賢明な選び方によって，任意の $\lambda \in (0,1)$ に対して，2 次元

ルベーグ測度 λ の集合 $\mathcal{C}(\lambda)$ を得ることができる.

$\mathcal{C}$ をパラメータ化し，それがジョルダン曲線であることを示そう．区間 $[0,1/2]$ を $\mathcal{T}_0$ へ写像し，区間 $[1/2,1]$ を $\mathcal{T}_1$ へ写像することによって，写像 $f:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ を生成しよう．$t=1/2$ は，$\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1$ が共通となる点となり，$[0,1/4]$ が $\mathcal{T}_{00}$ に移され，$[1/4,1/2]$ が $\mathcal{T}_{01}$ に移され，$[1/2,3/4]$ が $\mathcal{T}_{10}$ に移され，$[3/4,1]$ が $\mathcal{T}_{11}$ に移される．1/4 は $\mathcal{T}_{00}$ と $\mathcal{T}_{01}$ に共通である点に移り，1/2 は $\mathcal{T}_{01}$ と $\mathcal{T}_{10}$ に共通な点に移り，3/4 は $\mathcal{T}_{10}$ と $\mathcal{T}_{11}$ に共通な点に移される，などなどである.

あらゆる $t\in(0,1]$ を無限の 2 進数

$$t=0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots$$

(あらゆる有限の 2 進数 $0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots b_n1$ は，無限の 2 進数 $0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots b_n0\bar{1}$ に置き換えられる）によって表すと，上記の写像によって，$f(t)$ は，$\mathcal{T}_{b_1}$ 内と $\mathcal{T}_{b_1b_2}$ 内と $\mathcal{T}_{b_1b_2b_3}$ 内, などなどに存在する．$\mathcal{T}_{b_1}\supset\mathcal{T}_{b_1b_2}\supset\mathcal{T}_{b_1b_2b_3}\supset\mathcal{T}_{b_1b_2b_3b_4}\supset\ldots$ が点に縮小する閉三角形の縮小列であるので,

$$\mathcal{T}_{b_1}\cap\mathcal{T}_{b_1b_2}\cap\mathcal{T}_{b_1b_2b_3}\cap\mathcal{T}_{b_1b_2b_3b_4}\cap\ldots$$

は，作り方によって，$\mathcal{C}$ 上にあるただ 1 点を定める．すなわち,

$$f(0_{\dot{2}}b_1b_2b_3\ldots)=\mathcal{T}_{b_1}\cap\mathcal{T}_{b_1b_2}\cap\mathcal{T}_{b_1b_2b_3}\cap\mathcal{T}_{b_1b_2b_3b_4}\cap\ldots$$

である.

f は連続である：$|t_1-t_2|<1/2^n$ ならば，$f(t_1),f(t_2)$ は，せいぜい 2 つの隣接三角形 $\mathcal{T}_{b_1b_2b_3\ldots b_n}$ 内にあり，それらの距離は，2 つの最長の辺の長さの総和を越えることができない．辺は 0 に縮小するので，連続性はすぐにわかる. □

f は単射である：$\mathcal{C}$ 上の任意の点は，$\mathcal{T}_0$ または $\mathcal{T}_1$ 内に存在しなければならない．次に，それは，4 つの三角形の 1 つ $\mathcal{T}_{b_1b_2}$ 内に存在しなければならない．また，さらに，8 個の三角形の 1 つ $\mathcal{T}_{b_1b_2b_3}$ 内に存在しなれればならない，などなどである.（$[0,1]$ のただ 1 つの前像として，2 つの隣接閉区間に共通する点を持つ場合に，2 つの隣接三角形に共通する 1 点であるときを除けば，それは，同じ分割による 2 つの三角形内に同時に存在できないことに注意しよ

う.) 縮小閉三角形のこの列に対して，$[0,1]$ でただ 1 つの点を定める閉区間のただ 1 つの縮小列 $[b_1/2, b_1/2+1/2] \supset [b_1/2+b_2/4, b_1/2+b_2/4+1/4] \supset [b_1/2+b_2/4+b_3/8, b_1/2+b_2/4+b_3/8+1/8] \supset \ldots$ が対応する. □

以下に，その結果をまとめる.

定理 (8.3)　図 8.3.2 に最初の 2 ステップを示した過程によって得られた曲線 $\mathcal{C}$ は，(8.3.2) 式で与えられるように，正の 2 次元ルベーグ測度を持ったジョルダン曲線である.

クノップの目的は，新たなオズグッド曲線を見い出すことだけでなく，一端で 2 次元ルベーグ測度 0，他端で 2 次元ルベーグ測度 1，そして，その間のすべての値を持った，いたるところ微分不可能な曲線の表現を得ることであった.

一端において，上部で 120° の角度を持った二等辺三角形から始め，$r_j = 1/3$ をとり，各ステップで二等辺三角形を取り除く. 残ったすべての三角形に対して，初期三角形と同様のこの操作を適用し，2 次元ルベーグ測度

$$\Lambda_2(\mathcal{C}) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-1/3) = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$$

を持つジョルダン曲線を得る. 図 8.3.3 には，この曲線の生成における第 4 ステップを描いた. 極限曲線は，5.4 節においてすでに述べた**フォン・コッホ曲線** (von Koch curve) であり，9.1 節においてより詳しく述べる（図 9.1.2 を参照）.

他端において，長さ 2 の底辺を持った直角二等辺三角形から始め，$r_j = r^2/j^2$

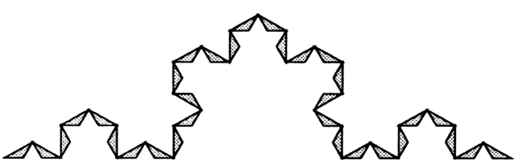


図 8.3.3　フォン・コッホ曲線のクノップによる生成の第 4 ステップ

としよう．(8.3.2) 式から，$r \to 0$ のとき，

$$\Lambda_2(\mathcal{C}) = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \longrightarrow 1$$

を得る．すなわち，極限において，空間充填曲線を得る．図 8.3.2 を図 4.2.1 と比較すると，この極限曲線は，第 4 章のシェルピンスキー–クノップ曲線を示している．偶然にも，それは，クノップがシェルピンスキー–クノップ曲線の複素表現 (4.2.4) 式を導いた生成法であった．

最近，K. シュトロームベルクとその学生 S. ゼンは，シェルピンスキーとクノップの例で，それらの曲線のあらゆる部分が再びオズグッド曲線である性質を持っているが，他の期待した特徴を保証しないことを見い出した．それは，次の意味での等質性である．$\beta \in (0,1)$ において，彼らは，あらゆる部分集合 $\mathcal{E} \subseteq [0,1]$ に対して，$\Lambda_2(f(\mathcal{E})) = \beta\Lambda_1(\mathcal{E})$ であることを問題視し，そこで，この種の性質を持ったオズグッド曲線を生成しようとした (Stromberg and Tseng[1])．

§8.4 他のオズグッド曲線

前節において，オズグッド曲線の族を議論した．その 1 つは，極限弧としてのペアノ曲線であり，他の 1 つは，極限弧としてのシェルピンスキー–クノップ曲線であった．図 8.4.1 には，極限弧としてのヒルベルト曲線に関するオズグッド曲線の族がいかに得られるかを，最初の 2 ステップで示している (Gelbaum and Olmsted[1], p.137)．この生成法は,「結合線」を使用しなければならないことがわかる．

ゲルバウムとオルムステッド (Gelbaum and Olmsted[1], p.135) は，「無関係の隣接性を取り除くため」，隣接部分区間に対応しない隣接正方形間に「チャネル (channel)」をあてがうことによって，ヒルベルト曲線の生成過程を変更した他の（大変複雑な）例を示した．

T. ランスと E. トーマスは，「結合線」の利用に再び戻って，1 つの生成法を提案した (Lance and Thomas[1])．筆者は，極限弧としてルベーグ曲線を持ったオズグッド曲線の族を得るために，これを変更した (Sagan[10])．図 8.4.2 に

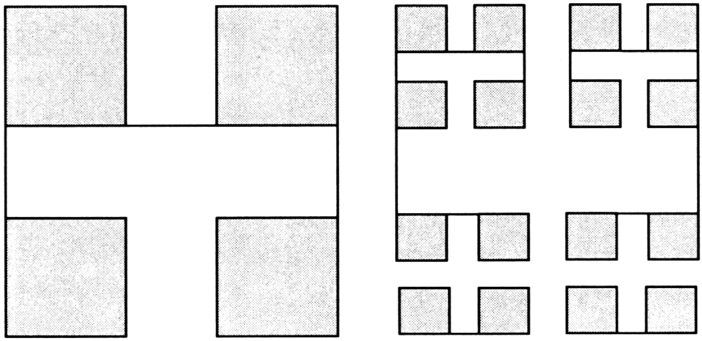


図 8.4.1 極限弧としてヒルベルト曲線を持ち「結合線」を持ったオズグッド曲線の生成

おいて，生成過程の最初の 2 ステップを示した．最初に十字形の領域の棒の幅を $(1-\sqrt{\lambda})/3$ に選び，次に，その幅を $(1-\sqrt{\lambda})/9$ に選び，さらに，$(1-\sqrt{\lambda})/27$ に選び，などなどとする．以前のように，n ステップでの残った正方形と結合線からなる領域を $\mathcal{A}_n(\lambda)$ とすると，$J_2(\mathcal{A}_n(\lambda)) = \{1-[1-(2/3)^n][1-\sqrt{\lambda}]\}^2$ である．したがって，$\mathcal{C}(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(\lambda)$ の 2 次元ルベーグ測度に対して，

$$\Lambda_2(\mathcal{C}(\lambda)) = \lim_{n\to\infty} [\sqrt{\lambda} + (2/3)^n(1-\sqrt{\lambda})]^2 = \lambda$$

を得る．8.2 節においてオズグッド曲線をパラメータ化したように，$\mathcal{C}(\lambda)$ をパラメータ化するが，Γ_8 の代わりにカントール集合 Γ を利用しよう．カントール集合の生成において取り除いた区間を「結合線」に写像し，残った閉区間を残りの正方形に写像すると，8.2 節からその写像は，連続であり，単射である．

要約すると，次のようになる．

定理 (8.4)　図 8.4.2 において最初の 2 ステップを描いた生成過程は，任意の $\lambda \in (0,1)$ に対して，2 次元ルベーグ測度 λ のオズグッド曲線を導く．

$\lambda = 0$ を選ぶならば，すなわち，幅 $1/3, 1/9, 1/27, \ldots$ の棒を持った十字

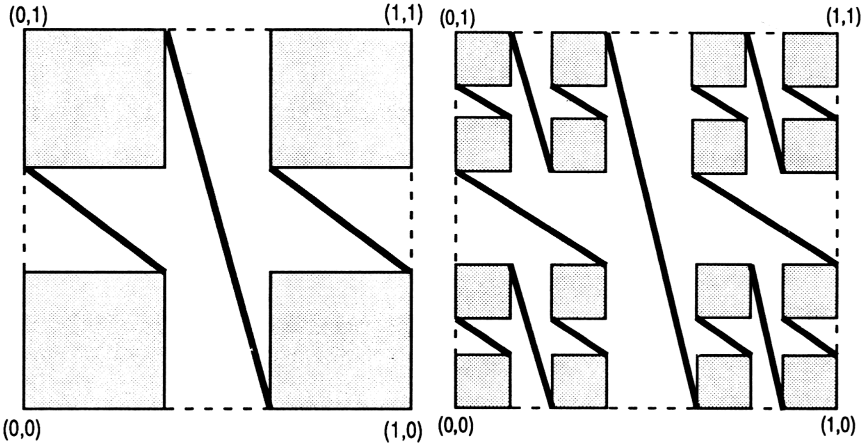


図 8.4.2　極限弧としてルベーグ曲線を持ったオズグッド曲線の族の生成

状の領域を取り除くならば，2 次元ルベーグ測度 0 のジョルダン曲線を得る．（この場合，$\mathcal{C}(0)$ は，カントール集合とそれ自身および適当な結合線との直積の和集合である．）$\lambda \to 1$ とすると，第 5 章のルベーグ曲線は，極限弧として得られる（5.5 節と，特に図 5.5.1，図 5.5.2，図 5.5.3 を参照）．

§8.5　問題

1. $\mathcal{Q}$ において，いたるところ稠密であるジョルダン曲線が存在し得ないことを証明しなさい．
2. オズグッドのジョルダン曲線の生成において，残った正方形（図 8.2 参照）の次元が $18^{-(n/2)}$（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）であるならば，2 次元ルベーグ測度 0 のジョルダン曲線が得られることを示しなさい．
3. $\Lambda_1(\Gamma_8)$ を求めなさい．(Γ_8 の定義については，8.2 節を参照.)
4. γ を二等辺三角形の頂上の鈍角としよう．残った三角形が原三角形に相似であるように，（図 8.3.1 のように）二等辺三角形を取り除きなさい．取り除いた三角形の面積と原三角形の面積の比が，$\cos\gamma/(\cos\gamma - 1)$ で

あることを示しなさい．($\pi/2 < \gamma < \pi$ であるので，この比が正であることに注意．)

5. 問題4で示した過程を無限に続けなさい．また，2次元ルベーグ測度0の「フォン・コッホ型」曲線が極限において得られることを示しなさい．
6. 閉ジョルダン曲線を次のようにして作りなさい．円環を半径で偶数個 $2m$ の合同区分 (section) に分割しなさい．8.2節の2次元ルベーグ測度 $\lambda > 0$ を持ったオズグッドのジョルダン曲線 $\mathcal{C}(\lambda)$ を移す $\mathcal{Q}$ を，角に入る角を持ったこれらの区分の1つに等角に写像しなさい．$\mathcal{C}'(\lambda)$ を $\mathcal{C}(\lambda)$ の像としよう．$\mathcal{C}''(\lambda)$ を得るために $\mathcal{C}'(\lambda)$ を隣接区分を持った境界で反射しなさい．また，$2m$ ステップ後に $\mathcal{C}^{(2m)} = \mathcal{C}(\lambda)$ となるまで，再三にわたって反射しなさい．$\mathcal{C}^{(2m-1)}(\lambda)$ の終点が $\mathcal{C}(\lambda)$ の始点と一致することに注意しなさい．同様に，閉ジョルダン曲線が作られる．ジョルダンの曲線定理によって，それは平面を内部と外部に分ける．内部の内測度（単に連結したもの）が，内部の外測度より小さいことを示しなさい．
7. $\mathcal{C}(\lambda)$ を8.2節のオズグッド曲線とし，また，$\Gamma_2(\lambda)$ を，$\mathcal{I}$ からそれぞれの長さが $(1-\sqrt{\lambda})/4$ の2つの開区間を取り除き，等長の3つの閉区間を残し，次に，これらの各閉区間からそれぞれの長さが $(1-\sqrt{\lambda})/24$ の2つの開区間を取り除き，さらに，$(1-\sqrt{\lambda})/144$ で同様の処理を繰り返し，などなどによって得られるカントール型の集合とする．$\Lambda_2(\mathcal{C}(\lambda)) = \Lambda_2(\Gamma_2(\lambda) \times \Gamma_2(\lambda))$ を示しなさい．
8. 生成が図8.4.2に描かれる8.4節のオズグッド曲線と，カントール型の集合 $\Gamma_1(\lambda)$ を使って，問題7と同様にしなさい．これは，$\mathcal{I}$ からまず長さ $(1-\sqrt{\lambda})/3$ の開区間を取り除き，次に，残った2つの合同閉区間のそれぞれから長さ $(1-\sqrt{\lambda})/9$ の開区間を取り除き，さらに $(1-\sqrt{\lambda})/27$，などなどによって得られる．
9. 8.3節のクノップのオズグッド曲線の生成において，頂上に鈍角 γ を持ち，底辺 c，最小の角 α を持った三角形から始まり，γ を越えない斜角を持った非直角三角形が残るように三角形を取り除き続けると，すべての残った三角形の角度はいずれも α より小さく，n 回目のステップで底辺がいずれも $c\cos^n \alpha$ を越えないことを示しなさい．

10. 極限弧として 2.8 節の 3 次元ヒルベルト曲線を持った 3 次元オズグッド曲線の族を作りなさい.

第 9 章　フラクタル

§9.1　例題

相似変換

$$
\begin{aligned}
\xi' &= \frac{1}{3}\xi \\
\xi' &= \frac{1}{3}(\xi + 2)
\end{aligned}
\tag{9.1.1}
$$

を図 9.1.1(a) の区間 $\mathcal{I}$ に適用すると，図 9.1.1(b) の配図を得る．(9.1.1) 式を図 9.1.1(b) の配図に適用すると，図 9.1.1(c) の配図を得る．それを図 9.1.1(c) に適用すると，図 9.1.1(d) の配図を得る，などなどである．これを無限に続けると，5.1 節のカントール集合（あるいは，B. マンデルブローが適切に呼んだような**カントールの塵** (Cantor dust)）にたどり着く．

次に，4 つの相似変換

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{9.1.2}
$$

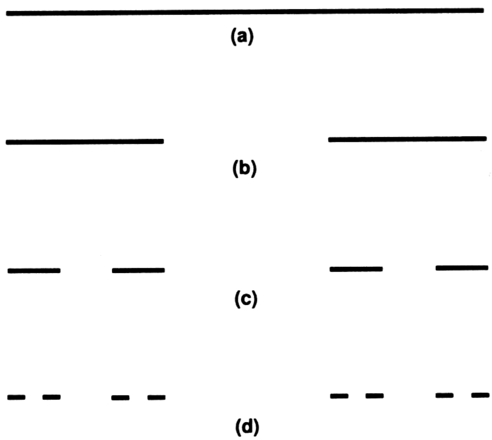
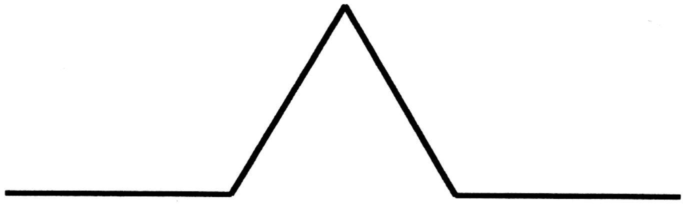


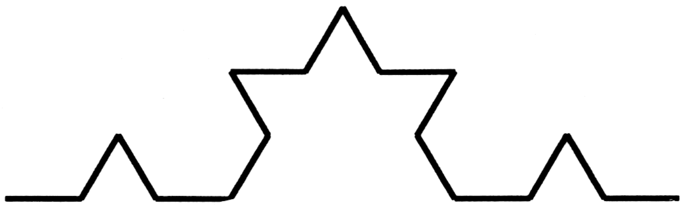
図 9.1.1　カントール集合の生成

を考え，それらを区間 $\mathcal{I}$ に適用する．1回の適用後，図 9.1.2(a) の配図を得，さらに，図 9.1.2(a) への適用後，図 9.1.2(b) の配図を得る．(9.1.2) 式を前の結果に適用すると図 9.1.2(c)，図 9.1.2(d)，などなどを得る．これを無限ステップ繰り返すと，フォン・コッホ曲線を得る．これを，R. F. フォスは，「初期数学の怪物 (early mathematical monster)」の1つと呼んだ（Peitgen and Saupe[1](p.26)，また本書 8.3 節を参照）．さらに，フォスは,「フォン・コッホ曲線を生成するアルゴリズムは，簡潔で，説明しやすく，計算しやすいけれども，曲線の点を特定する代数式がない」ことをつけ加えている（前掲文献．pp.27–28)．しかし，E. チェザロと K. クノップは，その式を導いた（Cesàro[2]，Knopp[1]．また，Sagan[12] を参照.）

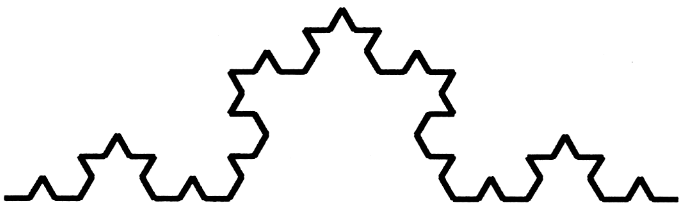
前述の2つの例では，$\mathcal{I}$ を初期集合（あるいは，2.6 節において呼んだ**ライトモティフ**）として使った．次の例では，辺長1の正三角形を初期集合として使い（図 9.1.3(a)），それに3つの変換



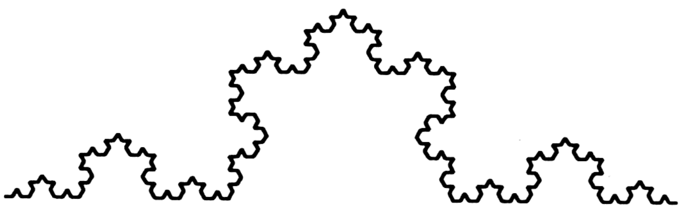
(a)



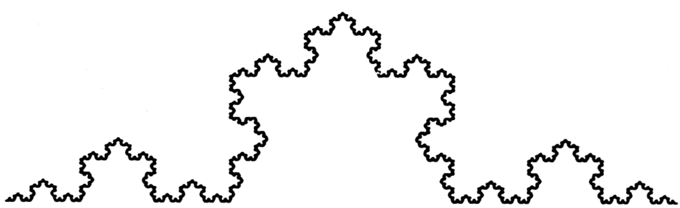
(b)



(c)



(d)



(e)

図 9.1.2 フォン・コッホ曲線の生成

$$
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}
$$

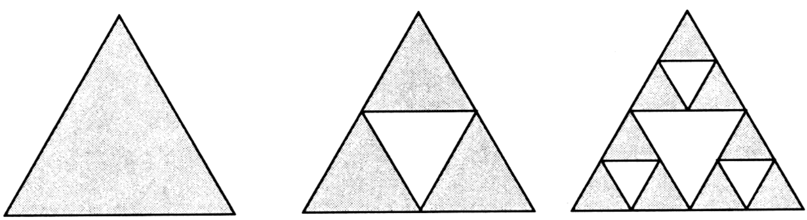
$$
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.1.3}
$$

$$
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

を適用し，図 9.1.3(b) の配図を得ている．また，(9.1.3) 式を図 9.1.3(b) に適用すると，図 9.1.3(c) を得る．これを無限ステップ繰り返すと，**シェルピンスキー三角形** (Sierpiński triangle)，あるいは，**シェルピンスキー・ガスケット** (Sierpiński gasket) と呼ばれるものを得る (Sierpiński[5])．各ステップで残った三角形は，4 つの合同三角形に分割され，真ん中のものが，取り除かれていることがわかる．フラクタル関係の文献において，取り除いた部分がよく**トレマ** (trema) として参照される（それは，明らかにギリシャ語の $\tau\rho\upsilon\mu\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha =$ 穴 から派生したものである）．カントール集合の最初の例において，真ん中の 1/3 がトレマである．

シェルピンスキー三角形の興味深い変形は，図 9.1.4(a) のように，初期三角形を 9 個の合同三角形に分割し，その中から 3 つを取り除けば得られる．次のステップは，図 9.5.1(b) に示されている．この**修正シェルピンスキー三角形** (modified Sierpiński triangle) を生成する相似変換の記述は，読者に演習問題として残しておく．

4 つの相似変換



(a)　(b)　(c)

図 9.1.3　シェルピンスキー・ガスケットの生成

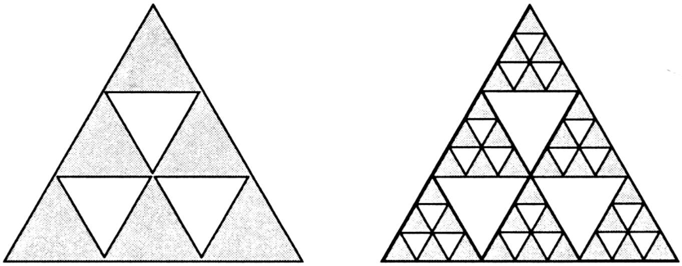


図 9.1.4 修正シェルピンスキー三角形の生成

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{9.1.4}
$$

（変換式 (2.4.1) と同じ）を区間 $\mathcal{I}$ に適用すると，図 2.6.1 のヒルベルト曲線の 1 次近似多角形を得る．また，(9.1.4) 式を 1 次近似多角形に適用すると，2 次近似多角形を得，それから，3 次近似多角形を得，などなどと続く．この操作を，正方形 $\mathcal{Q}$ であるヒルベルト曲線の軌跡を埋め尽くすまで続ける．図 2.6.2 のライトモティフを使うならば，$\mathcal{Q}$ を埋め尽くし，9.3 節で述べるように $\mathbb{E}^2$ の空でないコンパクト部分集合である限り，図 2.6.3 のライトモティフ —— あるいは，任意の他のライトモティフ —— から始めても，同じことが言える．

相似変換 (3.4.1) 式を同じように使って，ペアノ曲線の軌跡として $\mathcal{Q}$ を得，また，(4.3.1) 式を使って，シェルピンスキー–クノップ曲線の軌跡として $\mathcal{T}$ を得る．

これまでの例で得られた極限集合は，**自己相似フラクタル** (self-similar frac-

tal) と呼ばれるものの特殊な場合である．より一般的に，自己相似フラクタルは，$\mathbb{E}^m$ の空でないコンパクト部分集合に対して，一連の合同変換

$$x' = r_i U_i x + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{9.1.5}$$

を適用することによって得られ（ここで，$x, x', b_i \in \mathbb{E}^m, 0 < r_i < 1$ であり，U_i が $m \times m$ の直交行列である），それから，第1ステップで得られた像の和集合に対してこの合同変換を適用し，などなどと無限に続ける．このようにして生成された集合列は，ある意味で，第1の例のカントール集合，第2の例のフォン・コッホ曲線，第3の例のシェルピンスキー三角形などのような $\mathbb{E}^m$ の空でない一意コンパクト部分集合に収束する．

9.2 節において，$\mathbb{E}^m$（あるいは，任意の完備距離空間[1]）のコンパクト部分集合列の「収束 (convergence)」の意味するところを説明するであろう．また，9.3 節では，極限集合が唯一存在することを示そう．

膨大で，美しく図示されたフラクタル関係の文献が利用可能である．読者は，Barnsley[1]，Edgar[1]，Mandelbrot[1]，Peitgen and Richter[1]，Peitgen and Saupe[1] を参考にされたい．起源を H. ポアンカレ，R. R. フリッケ，フェリックス・クラインに遡るフラクタルの短い歴史は，Peitgen and Saupe[1] で知ることができる．繰り返しによる生成の性質から，相似変換 (9.1.5) 式の適用後に得られる集合は，計算機による生成を簡単にする．計算機プログラムは，たとえば，Barnsley[1]，Edgar[1]，Peitgen and Saupe[1] に見られるであろう．

当然功績が与えられるはずなのに，W. ヴンダーリヒは，ほとんど注目されなかった 1954 年の論文 (Wunderlich[1]) において，フォン・コッホ曲線，シェルピンスキー・ガスケット，ヒルベルト曲線，シェルピンスキー–クノップ曲線を生成する相似変換の過程をすでに使っていたことを指摘しておこう．彼は，同じ論文において，シュタイニッツ曲線 (Steinitz[1])，ボルツァーノ–コワレフスキ曲線 (Kowalewski[1])，ラーム曲線 (Rham[1]) を生成するためにアフィン変換を使っていたのである．

---

1 ［訳註］完備性については，付録 A.2.3 を参照．

§9.2 フラクタルが作られる空間

簡略化した記法

$$r_i U_i x + b_i \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{F}_i(x)$$

を使って，相似変換系 (9.1.5) 式を

$$x' = \mathfrak{F}_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{9.2.1}$$

と書こう．M. バーンズリは，相似変換のそのような集合に対して，**反復関数系** (iterated function system) という言葉を導入した．ここでは，この流儀に従う．

直交変換が保長 (length-preserving) であるので，

$$||\mathfrak{F}_i(x_1) - \mathfrak{F}_i(x_2)|| = r_i||U_i x_1 - U_i x_2|| = r_i||x_1 - x_2||$$

を得る．これは，r_i が $\mathfrak{F}_i$ **の縮小率** (reduction raio of $\mathfrak{F}_i$) である理由を示している．

反復関数系 (9.2.1) 式を，ある空でないコンパクト部分集合 $\mathcal{A}_0 \subset \mathbb{E}^m$ に適用し，それから再び，コンパクト集合の連続像の有限和集合として，コンパクトである

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{F}_{j*}(\mathcal{A}_0)$$

に適用する．この操作を再三繰り返し，コンパクト集合の無限列

$$\mathcal{A}_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{F}_{j*}(\mathcal{A}_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

を生成する．次節では，この列が以下に述べる意味で，唯一の極限集合，いわゆる**不変アトラクター集合** (invariant attractor set) に収束し，その極限集合が，初期集合の選択に関係ないことがわかるであろう．

$\mathbb{E}^m$ の空でないコンパクト部分集合を要素に持つ空間に取り組んでいるので，まず，収束の意味を定義しなければならない．次に，$\mathbb{E}^m$ の 2 つの空でないコンパクト部分集合間の「距離 (distance)」の意味を理解しなければな

らない．ここで進展させることは，ユークリッド空間に対して成り立つばかりでなく，一般の完備距離空間 S に対しても成り立つ（S 内のあらゆるコーシー列は，S 内のある要素に収束する）ことである．なお，記法 S を使っているが，読者は，m 次元ユークリッド空間として，それを考えてほしい．

まず，S の空でないすべてのコンパクト部分集合の集合に対して，記法 $K(S)$ を導入しよう．**S のコンパクト部分集合の開 δ 近傍**の概念によって，2つの集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq K(S)$ 間の**ハウスドルフ距離** (Hausdorff distance) を定義しよう．

定義 (9.2.1) $\rho(x, y)$ を S 内の x から y への距離とし，また，$\mathcal{A}$ を S の空でないコンパクト部分集合としよう．$\rho(x, y) < \delta$ であるような $y \in \mathcal{A}$ が存在するならば，$x \in N_\delta(\mathcal{A})$（$\mathcal{A}$ の δ 近傍）である．

たとえば，$\{x \in S | \rho(0, x) < 1 + \varepsilon\}$ は，単位球 $\{x \in S | \rho(0, x) < 1\}$ の ε 近傍である．集合の近傍は，集合の**膨張** (dilation) としてときどき参照される．

定義 (9.2.2) 2つの空でないコンパクト集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset K(S)$ 間のハウスドルフ距離は，

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\delta | \mathcal{A} \subseteq N_\delta(\mathcal{B}) \text{ かつ } \mathcal{B} \subseteq N_\delta(\mathcal{A})\}$$

によって定義される．

これは，まさに距離である．

命題 (9.2.1) 定義 9.2.2 におけるハウスドルフ距離は，距離の公準を満たす．

証明 (1) 定義により，$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 0$．$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ のとき，かつそのときに限り，$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ である．$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{B})$ と $\mathcal{B} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A})$ である．したがって，$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ となる．逆に，$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ としよう．$x \in \mathcal{A}$ であれば常に，あらゆる $\varepsilon > 0$ に対して，$x \in N_\varepsilon(\mathcal{B})$，す

なわち，ある $y \in \mathcal{B}$ に対して $\rho(x,y) < \varepsilon$ を得る．$\mathcal{B}$ がコンパクトであるので，$x \in \mathcal{B}$ である．したがって，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ となる．同様にして，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ となるので，$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ を得る．

(2) 定義より直接，$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(\mathcal{B},\mathcal{A})$ となる．

(3) 三角不等式は満たされる：$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を S の空でないコンパクト部分集合とする．$x \in \mathcal{A}$ としよう．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\rho(x,y) < d(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \varepsilon$ となるような $y \in \mathcal{B}$ が存在し，$\rho(y,z) < d(\mathcal{B},\mathcal{C}) + \varepsilon$ となるような $z \in \mathcal{C}$ が存在する．$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < d(\mathcal{A},\mathcal{B}) + d(\mathcal{B},\mathcal{C}) + 2\varepsilon$ なので，$\mathcal{A} \subset N_{d(\mathcal{A},\mathcal{B})+d(\mathcal{B},\mathcal{C})+2\varepsilon}(\mathcal{C})$ と同様に，$\mathcal{C} \subset N_{d(\mathcal{A},\mathcal{B})+d(\mathcal{B},\mathcal{C})+2\varepsilon}(\mathcal{A})$ を得る．したがって，定義 (9.2.2) により，$d(\mathcal{A},\mathcal{C}) \leq d(\mathcal{A},\mathcal{B}) + d(\mathcal{B},\mathcal{C}) + 2\varepsilon$ となる．すべての $\varepsilon > 0$ に対して，これは真となり，その結果，$d(\mathcal{A},\mathcal{C}) \leq d(\mathcal{A},\mathcal{B}) + d(\mathcal{B},\mathcal{C})$ となる． □

定義 9.2.2 のハウスドルフ距離の定義から直接，次のことを得る．

命題 (9.2.2) $\mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{B})$ と $\mathcal{B} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A})$ のとき，かつそのときに限り，$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \varepsilon$ である．

アトラクター集合の存在と一意性を見るため，$\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_{i*}(\mathcal{A})$ によって定義された $\mathfrak{F}_* : K(S) \to K(S)$ が，縮小写像であることを示し，それから縮小写像定理を使う．しかし，縮小写像定理の適用は，空間 $K(S)$ の完備性を必要とする．この節での目的は，この完備性を示すことにある．次の 2 つの命題は，この努力の助けになるだろう．

命題 (9.2.3) $\mathcal{A},\mathcal{B} \subseteq K(S)$ と $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \varepsilon$ ならば，任意の固定した $a \in \mathcal{A}$ に対して，$\rho(a,b) < \varepsilon$ となるような $b \in \mathcal{B}$ が存在する．

証明 仮定により，$\inf\{\delta | \mathcal{A} \subseteq N_\delta(\mathcal{B})$ かつ $\mathcal{B} \subseteq N_\delta(\mathcal{A})\} < \varepsilon$ である．したがって，$a \in \mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{B})$ である．これは，$\rho(a,b) < \varepsilon$ であるような $b \in \mathcal{B}$ が存在するという意味である． □

$K(S)$ が完備であることを示すため，$K(S)$ 内のあらゆるコーシー列 $\{\mathcal{A}_n\}$ が S の空でないコンパクト部分集合に収束することを示さなければならない．その極限集合が，$\mathcal{A}_1$ から第1要素を選び，$\mathcal{A}_2$ から第2要素を選び，などなどによって作られる S の点のすべてのコーシー列の極限からなることは，明らかである．すなわち，

$$\mathcal{A} = \{x \in S | x \text{ は，列 } \{x_n\},\ x_n \in \mathcal{A}_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \text{の極限である.}\}$$

この集合が空でないことを示すため，次のことを必要とする．

命題 (9.2.4)　$\{\mathcal{A}_n\}$ が，ハウスドルフ距離によって定義された測度を持った距離空間 $K(S)$ 内のコーシー列であるならば，列 $\{x_n\} \to x \in S$（ただし，$x_n \in \mathcal{A}_n$）が存在する．

証明　$\{\mathcal{A}_n\}$ がコーシー列であるので，あらゆる $\varepsilon > 0$ に対して，N_ε が存在し，すべての $m, n > N_\varepsilon$ に対して，$d(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_m) < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，すべての $n > N_j, j = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$d(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{N_j}) < \varepsilon/2^j$$

であるような増加列 $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_j < \cdots$ を選ぶことができる．任意の $x_{N_1} \in \mathcal{A}_{N_1}$ を選ぼう．作り方によって，$d(\mathcal{A}_{N_1}, \mathcal{A}_{N_2}) < \varepsilon/2$ である．命題 9.2.3 により，$\rho(x_{N_1}, x_{N_2}) < \varepsilon/2$ となるような $x_{N_2} \in \mathcal{A}_{N_2}$ が存在する．再び，命題 9.2.3 により，$\rho(x_{N_2}, x_{N_3}) < \varepsilon/4$ となるような $x_{N_3} \in \mathcal{A}_{N_3}$ が存在する，などなどである．結局は，$\rho(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) < \varepsilon/2^{j-1}$ となるような $x_{N_j} \in \mathcal{A}_{N_j}$ が存在する，などなどである．$\{x_{N_j}\}$ はコーシー列である．すなわち，

$$\begin{aligned}\rho(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq \rho(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \cdots + \rho(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &\leq \varepsilon/2^m + \cdots + \varepsilon/2^{n-1} < \varepsilon/2^{m-1}\end{aligned}$$

である．この列をふくらませて，議論を進め，必要とするものを得よう．$n = 1, 2, 3, \ldots, N_1$ に対して，任意に $\bar{x}_n \in \mathcal{A}_n$ を選ぶ．$j = 2, 3, 4, \ldots$ に対して，$\bar{x}_{N_j} = x_{N_j}$ としよう．$\rho(\bar{x}_{N_1}, \bar{x}_n) < \varepsilon/2$ となるように，$N_{N_1} < n < N_{N_2}$

を満たすすべての n に対して，$\bar{x}_n \in \mathcal{A}_n$ を選ぶ．これは，命題 9.2.3 を考慮してなされる．この方法を続けると，結局は，$\rho(\bar{x}_{N_j}, \bar{x}_n) < \varepsilon/2^j$ となるように，$N_j < n < N_{j+1}$ を満たすすべての n に対して，$\bar{x}_n \in \mathcal{A}_n$ を選ぶ，などなどである．列 $\{\bar{x}_n\}$ は，$n = N_1, N_2, N_3, \ldots$ かつ $\bar{x}_n \in \mathcal{A}_n$ に対して，列 $\{x_{N_j}\}$ に一致する．それは，作り方によってコーシー列であり，S が完備であるので，$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x(\in S)$ が存在する．□

命題 9.2.4 に関する系　$\{\mathcal{A}_n\}$ が $K(S)$ 内でコーシー列であるならば，

$\mathcal{A} = \{x \in S | x$ は，列 $\{x_n\}$ (ただし,$x_n \in \mathcal{A}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) の極限である $\}$

は空でない．

さて，この節の中心となる結果をまとめる準備ができた．W. ブラシュケ ──「ブラシュケの選択定理」── にさかのぼろう．彼は，一様に有界の凸体の無限集合から，凸体に収束する列を選択できることを最初に述べた人である．(Blaschke[1](p.200)．証明は Blaschke[2](p.62) に見られる.)

定理 (9.2)　ハウスドルフ距離を持った S の空でないコンパクト部分集合の空間 $K(S)$ は，完備である．すなわち，$\mathcal{A}_n \in K(S)$ を持ったあらゆるコーシー列 $\{\mathcal{A}_n\}$ は，ある $\mathcal{A} \in K(S)$ に収束する．

証明　$\mathcal{A}$ が命題 9.2.4 に関する系において定義されているので，$\{\mathcal{A}_n\} \to \mathcal{A}$ であることを示し，また，$\mathcal{A}$ がコンパクトであることを示そう．

$\{\mathcal{A}_n\} \to \mathcal{A}$ であることを示すため，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，N_ε が存在し，$\mathcal{A} = \{x \in S | x$ は列 $\{x_n\}$ (ただし,$x_n \in \mathcal{A}_n, n = 1, 2, 3, \ldots$) の極限である$\}$ となるので，$n > N_\varepsilon$ である限り $d(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}) < \varepsilon$ となることを示そう．命題 9.2.2 によって，これは，すべての $n > N_\varepsilon$ に対して，$\mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)$ と $\mathcal{A}_n \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A})$ に等しい．

(a) $\mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)$ を示すため，次のように議論を進める．$x \in \mathcal{A}$ に対して，$x_n \in \mathcal{A}_n$ による列 $\{x_n\} \to x$ が存在する．すべての $n, m > N$ に対して，$\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ と $d(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_m) < \varepsilon/2$ となるような N を選ぶ．$x_n \in \mathcal{A}_n$ な

らば，命題 9.3.3 によって $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ であるような $x_m \in \mathcal{A}_m$ が存在する．したがって，$\rho(x_m, x) \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, x) < \varepsilon$ である．よって，$x \in N_\varepsilon(\mathcal{A}_m)$ となる．ゆえに，$\mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A}_m)$ を得る．

(b) 十分に大きな n に対して，$\mathcal{A}_n \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A})$ であることを示すことにより議論に決着をつけよう．すべての $m > N_j$（ただし，$j = 1, 2, 3, \ldots$）に対して，$d(\mathcal{A}_{N_j}, \mathcal{A}_m) < \varepsilon/2^{j+1}$ となるような列 $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_j < \cdots$ を選ぶ．$y \in \mathcal{A}_{N_1}$ とし，また，$n = N_1$ としよう．命題 9.2.3 によって，$\rho(y, x_{N_2}) < \varepsilon/2^2$ となるような $x_{N_2} \in \mathcal{A}_{N_2}$ を選び，$\rho(x_{N_2}, x_{N_3}) < \varepsilon/2^3$ となるような $x_{N_3} \in \mathcal{A}_{N_3}$ を選び，などなどである．一般に，$\rho(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \varepsilon/2^{j+1}$ となるような $x_{N_{j+1}} \in \mathcal{A}_{N_{j+1}}$ を選ぶ．$\{x_{N_j}\}$ がコーシー列であるので，命題 9.2.4 の証明のように，$k = N_j$ と $x_n \in \mathcal{A}_n$ に対して，$\{x_{N_j}\}$ と一致するコーシー列 $\{x_k\} \to x \in \mathcal{A}$ を得ることを示すことができる．したがって，$\{x_{N_j}\} \to x$ である．作り方によって，

$$\begin{aligned}\rho(y, x_{N_j}) &\leq \rho(x_{N_1}, x_{N_2}) + \rho(x_{N_2}, x_{N_3}) + \cdots + \rho(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \\ &< (\varepsilon/4)(1 + 1/2 + 1/4 + \cdots) = \varepsilon/2\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\rho(y, x) = \lim_{j \to \infty} \rho(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$$

を得る．これは，任意の $y \in \mathcal{A}_n$ に対して真であり，$\mathcal{A}_n \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A})$ となる．

$\mathcal{A}$ がコーシー列 $\{\mathcal{A}_n\}$ の極限であることがわかり，また，命題 9.2.4 から $\mathcal{A}$ が空でないことがわかる．後は，$\mathcal{A}$ がコンパクトであることを示すだけである．ハイネ–ボレルの定理（定理 6.2.1）により，これは，$\mathcal{A}$ が有界で閉であることを示すことに等しい．

(c) $\mathcal{A}$ は有界である．与えられた $\varepsilon > 0$ と十分大きな n に対して，$\mathcal{A} \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)$（ただし，$\mathcal{A}_n \in K(S)$）であり，したがって，$\mathcal{A}_n$ がコンパクトであることが部分 (a) からわかった．結局，$\mathcal{A}_n$ は有界である．すなわち，$\mathcal{A}_n \subseteq N_R(0)$ となるような $R > 0$ が存在する．$y \in N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)$ ならば，$x \in \mathcal{A}_n$ に対して $\rho(y, x) < \varepsilon$ である．したがって，$\rho(y, 0) \leq \rho(0, x) + \rho(x, y) \leq R + \varepsilon$ となる．これは，すべての $y \in N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)$ に対して真であり，また，$N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)$ は，有界となることが明らかである．$\mathcal{A}$ がそれに含まれるので，有界である．

(d) $\mathcal{A}$ は閉である．すなわち，そのすべての集積点を含む（命題 6.1）．$a \in S$ が $\mathcal{A}$ の集積点を表すとしよう．そのとき，列 $\{a_n\} \to a$（ただし，$a_n \in \mathcal{A}$）が存在する．$\mathcal{A}$ の定義により，各 a_n に対して，$x_{nj} \in \mathcal{A}_n$ を持った列 $\{x_{nj}\} \to a_n$ が存在する．$\rho(a_{N_j}, a) < 1/j$ となるような $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_j < \cdots$ を選ぶ．各 N_j に対して，$\rho(x_{N_j m_j}, a_{N_j}) < 1/j$ となるような m_j が存在する．したがって，$\rho(x_{N_j m_j}, a) < 2/j$ である．$y_{N_j} = x_{N_j m_j}$ としよう．作り方によって，$y_{N_j} \in \mathcal{A}_{N_j}$ と $\lim_{j\to\infty} y_{N_j} = a$ である．命題 9.2.4 の証明のように，$y_n \in \mathcal{A}_n$ を持った列 $\{y_n\} \to a$ を得るために，この列を「埋める (fill up)」．したがって，$a \in \mathcal{A}$ であり，$\mathcal{A}$ は閉である．□

§9.3　不変アトラクター集合

アトラクター集合の存在と一意性を見るため，写像

$$\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_{i*}(\mathcal{A}) \tag{9.3.1}$$

が縮小写像であることを示そう．ここで，$\mathfrak{F}_i : S \to S$（ただし，$i = 1, 2, 3, \ldots, n$）は，縮小率 $r_i \in (0, 1)$ を持った相似変換である．残りでは，縮小写像定理を説明しよう．

定理 (9.3.1)　(9.3.1) 式の写像は，縮小写像 $d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}), \mathfrak{F}_*(\mathcal{B})) \leq rd(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ である．ここで，$r = \max(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in (0, 1)$ である．

証明　$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset K(S)$ とし，ある $\delta > d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を選ぶ．$x \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{A})$ ならば，$i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ に対して，$x' \in \mathcal{A}$ より $x = \mathfrak{F}_i(x')$ となる．$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \delta$ となるので，命題 9.2.3 によって，$\rho(x', y') < \delta$ となるような点 $y' \in \mathcal{B}$ が存在する．すなわち，$y = \mathfrak{F}_i(y') \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{B})$ である．したがって，$\rho(x, y) \leq r\rho(x', y') < rd(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < r\delta$ となる．これは，すべての $x \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{A})$ に対して真である．したがって，$\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}) \subseteq N_{r\delta}(\mathfrak{F}_*(\mathcal{B}))$ となる．同様にして，$\mathfrak{F}_*(\mathcal{B}) \subseteq N_{r\delta}(\mathcal{A})$ を得る．命題 9.2.2 によって，$d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}), \mathfrak{F}_*(\mathcal{B})) \leq r\delta$ となる．これは，任意の

$\delta > d(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に対して真であり，したがって，$d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}),\mathfrak{F}_*(\mathcal{B})) \le rd(\mathcal{A},\mathcal{B})$ を得る．□

いろいろな解説において縮小写像定理は，解析の最も立派な扱いを受けている．読者にわかりやすくするため，ここでは，我々の表記を使って一覧にし，必要なものに証明を加えている．

定理 (9.3.2)（縮小写像定理）　完備距離空間 $K(S)$ における縮小写像 $\mathfrak{F}_*: K(S) \to K(S)$, $d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}),\mathfrak{F}_*(\mathcal{B})) \le rd(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $0 < r < 1$ は，唯一の「不動点」$\mathcal{A} = \mathfrak{F}_*(\mathcal{A})$ を持つ．

証明　$\mathcal{A}_0 \in K(S)$ と $\mathcal{A}_{k+1} = \mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_k)$（ただし，$k = 0,1,2,3,\ldots$）としよう．$d(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_1) = \delta$ ならば，

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2) &= d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_0),\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_1)) \le r\delta \\
d(\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3) &= d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_1),\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_2)) \le r^2\delta \\
&\vdots \\
d(\mathcal{A}_n,\mathcal{A}_{n+1}) &= d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_{n-1}),\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_n)) \le r^n\delta \\
&\vdots
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{A}_m,\mathcal{A}_n) &\le d(\mathcal{A}_m,\mathcal{A}_{m+1}) + d(\mathcal{A}_{m+1},\mathcal{A}_{m+2}) + \cdots + d(\mathcal{A}_{n-1},\mathcal{A}_n) \\
&\le r^m\delta + r^{m+1}\delta + \cdots + r^{n-1}\delta = r^m\delta(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1-m}) \\
&< \delta r^m/(1-r)
\end{aligned}$$

となり，$\{\mathcal{A}_n\}$ がコーシー列であることがわかる．$K(S)$ が完備であるので，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A} \in K(S)$ が存在する．$\mathcal{A}_{n+1} = \mathfrak{F}_*(\mathcal{A}_n)$ の両項で極限をとると，不動点 $\mathcal{A}$ が存在することを意味する式 $\mathcal{A} = \mathcal{F}_*(\mathcal{A})$ を得る．($\mathfrak{F}$ が連続であることに注意されたい．なぜならば，$d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}),\mathfrak{F}_*(\mathcal{B})) \le rd(\mathcal{A}.\mathcal{B}) < \varepsilon$ は，$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \varepsilon/r$ を与える．)

$\mathcal{A}$ が一意であることを示すため，逆に，2つの異なった不動点 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が存

在すると仮定する．そのとき，$\mathcal{A} = \mathfrak{F}_*(\mathcal{A}), \mathcal{B} = \mathfrak{F}_*(\mathcal{B})$ であり，$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(\mathfrak{F}_*(\mathcal{A}),\mathfrak{F}_*(\mathcal{B})) \le rd(\mathcal{A},\mathcal{B})$ を得る．したがって，$r \ge 1$ である．これは，$0 < r < 1$ という仮定に矛盾する． □

定理 9.3.1 と定理 9.3.2 から次の定理を得る．

定理 (9.3.3) S が完備距離空間であり，$\mathfrak{F}_i : S \to S$ が縮小率 $r_i \in (0,1)$ の相似変換を表すならば，$\mathfrak{F}_*(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_{i*}(\mathcal{S}), \mathcal{S} \in K(S)$ によって定義された写像 $\mathfrak{F}_* : K(S) \to K(S)$ は，コンパクト・アトラクター集合 $\mathcal{A} = \mathfrak{F}_*(\mathcal{A})$ を持ち，このアトラクター集合は一意である．

アトラクター集合が初期集合 $\mathcal{A}_0$ の選択によらないことは，定理 9.3.3 からわかる．たとえば，反復関数系 (9.1.1) 式によって 9.1 節のカントール集合を生成するとき，$\mathcal{I}$ 以外の初期集合から始まったとしても，初期集合が $\mathbb{E}^1$ の空でないコンパクト集合である限り，カントール集合を得るであろう．区間 [1,3/2] から始めたとしよう．(9.1.1) 式の適用は，1 回の繰り返し後，1/3 に始点をおき，次に，$1/9, 1/27, 1/81, \ldots \to 0$ となる．終点 3/2 は，$3/6 + 2/3 = 7/6$ に動き，それから，$19/18, 55/54, \ldots \to 1$，などなどに動く．

$\mathcal{Q}$ は，(2.4.1) 式（ヒルベルト曲線）と (3.4.1) 式（ペアノ曲線）において定義された写像のアトラクター集合であり，$\mathcal{T}$ は，(4.3.1) 式（シェルピンスキー–クノップ曲線）における写像のアトラクター集合であり，$\mathcal{W}$ は，(2.8.2) 式（3 次元ヒルベルト曲線）における写像のアトラクター集合である．初期集合としていかなるコンパクト集合を選んでも，これらのアトラクター集合を得るであろう．しかし，意味ある中間結果，すなわち，近似曲線を得るために，初期集合（ライトモティフ）として入口点と出口点を結合する曲線を選びたい．

本節と前の 2 節で考察したように，反復関数系 $x' = \mathfrak{F}_k(x)$ のアトラクター集合 $\mathcal{A}$ が道状連結しており（定理 9.3.3 によってコンパクトである），$\mathfrak{F}_k(\xi_0, \eta_0) = (\xi_{k-1}, \eta_{k-1})$，$\mathfrak{F}_k(\xi_n, \eta_n) = (\xi_k, \eta_k)$（ただし，$k = 1, 2, 3, \ldots, n$）（$\mathfrak{F}_{k-1*}(\mathcal{A})$ からの出口点が，$\mathfrak{F}_{k*}(\mathcal{A})$ への入口点に一致すると

仮定する）となるような異なる点 $(\xi_k, \eta_k) \in \mathcal{A}$（ただし，$k = 0, 1, 2, \ldots, n$）が存在するならば，点 $(\xi_0, \eta_0), (\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ を補間する連続関数 $f : [0,1] \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{A}$ が存在することがわかる．ここで，(ξ_0, η_0) は，始点を表し，(ξ_n, η_n) は，終点を表す．すなわち，$f(0) = (\xi_0, \eta_0)$，$f(1) = (\xi_n, \eta_n)$ である．$J_2(\mathcal{A}) > 0$ であれば，f は，空間充填曲線を表す (Barnsley[1], pp.240–245).

§9.4　相似次元

フォン・コッホ曲線とシェルピンスキー・ガスケットを比較すると，後者がはるかに複雑であり，より稠密に平面を埋めていることが直観的にわかる．同様に，修正シェルピンスキー三角形は，シェルピンスキー・ガスケットより複雑に見える．しかし，ルベーグ測度も位相次元もこれに対する手がかりを与えていない．8.3 節では，フォン・コッホ曲線がルベーグ測度 0 を持つことを見てきた．面積 A の正三角形から始めてシェルピンスキー・ガスケットを作るとき，第 1 ステップで面積 A/4 の三角形を取り除く．次のステップでは，それぞれに対して面積 A/16 の 3 つの三角形を取り除き，その次のステップでは，それぞれに対して面積 A/64 の 9 個の三角形を取り除く，などなどである．そして，ルベーグ測度 0（Λ_2（**シェルピンスキー三角形**）$= 0$）の集合が残る．これは，驚くようなことではない．なぜならば，フラクタルの構成において，あらゆるステップで，トレマの容量が取り除かれた部分の容量に対して固定比 $\rho \in (0,1)$ を示すとき，最終的に残ったもののルベーグ測度は 0 である．初期集合の容量を 1 としよう．1 ステップ後に，$(1-\rho)$ が残る．2 ステップ後には，$1 - \rho - \rho(1-\rho) = (1-\rho)^2$ が残る，などなどであり，n ステップ後では，$(1-\rho)^n$ が残り，$n \to \infty$ のとき，$(1-\rho)^n \to 0$ となる（8.3 節も参照）．

修正シェルピンスキー三角形を作図するとき，初期三角形を 9 個の合同三角形に分割し，3 個を取り除き，6 個を残す（図 9.1.4 を参照）．トレマの面積は，取り除かれた面積に対して固定比 1/3 になる．したがって，Λ_2（**修正シェルピンスキー三角形**）$= 0$ となる．

位相次元 (topological dimension) は，複雑さを等しく表わすことができない．それを例証としてのみ使うので，ここでは，略式の定義を与える．すなわち，集合内の点が動けない (move) ならば，集合は位相次元 0 を持つとする．たとえば，有限個の点を含む集合は，いずれの点も集合を出ないで動くことができないので，位相次元 0 を持つ．集合内の任意の点が次元 0 の部分集合によって閉じこめられるならば，集合は位相次元 1 を持つ．たとえば，線分は，その中の任意の点が前の定義によって位相次元 0 を持つ 2 点を含む集合によって閉じこめられるので，位相次元 1 を持つ．ジョルダン曲線は，位相次元 1 の集合の他の例である．集合内の任意の点が位相次元 1 の部分集合によって閉じこめられるならば，集合は位相次元 2 を持つ．たとえば，正方形内の任意の点が閉ジョルダン曲線（これは，前の定義によって位相次元 1 を持つ）によって閉じこめられるので，正方形は位相次元 2 を持つ．位相次元の定義の帰納的過程を説明するには，これで十分である．フォン・コッホ曲線，シェルピンスキー・ガスケット，修正シェルピンスキー三角形が位相次元 1 を持つことと，位相次元がこれらの曲線の複雑さと稠密性の間を区別できないことは明らかである．

しかし，位相次元，または，ルベーグ測度より，空間を占める複雑さと稠密性の正確な測度を与えるように，非整数次元を集合に対して割り当てることは，(1 つ以上の方法で）可能である．ここでは，非整数次元の最も簡単な概念を与える自己相似フラクタルのみを扱う．次のように定義の動機づけを与える．1 次元線分は，それぞれ長さ $1/n$ の n 個の等線分に分割できる．2 次元集合は，縮小し n 回コピーしたときに，n 個の合同コピーが重ならないで原集合と同じ空間の量を占めるならば，因数 $1/\sqrt{n}$ によって縮小されなければならない．3 次元集合が n 回コピーされるならば，n 個の合同コピーが重ならないで，原集合と同じ空間の量を占めるように，因数 $1/\sqrt[3]{n}$ によって縮小されなければならない．一般に，s 次元集合が n 回コピーされ，n 個のコピーが重ならないで前と同じ空間の量を占めるならば，因数 $r = 1/\sqrt[s]{n}$ によって縮小されなければならない．これにより，次のような定義を与える．

定義 (9.4) 縮小率 $r \in (0,1)$ を持った一連の n 相似変換 $x' = \mathfrak{F}_j(x)$（ただし，$j = 1,2,3,\ldots,n$）によって生成される自己相似フラクタル（アトラク

ター集合）は，

$$s = \frac{\log(n)}{\log(1/r)}$$

の相似次元を持つという．（ここで，明らかにどの対数が使われるかは問題ではない）．より一般的に，$\mathfrak{F}_1$ が縮小率 $r_1 \in (0,1)$ を持ち，$\mathfrak{F}_2$ が縮小率 $r_2 \in (0,1)$，などなどを持ち，$\mathfrak{F}_n$ が縮小率 $r_n \in (0,1)$ を持つならば，アトラクター集合の相似次元 s は，

$$r_1^s + r_2^s + \cdots + r_n^s = 1$$

の（一意の）解である．

この定義は，アトラクター集合自身に結びついていないが，それを生成する反復関数系に結びついていることに注意されたい．同じアトラクター集合が，異なる相似次元を導くように異なる反復関数系によって生成されることは考えられることである．たとえば，反復関数系

$$\xi' = \frac{\xi}{2}, \quad \xi' = \frac{\xi+1}{2}$$

は，アトラクター集合として区間 $\mathcal{I}$ を持ち，定義 9.4 により，$\mathcal{I}$ の相似次元は，$\log 2/\log 2 = 1$ である．しかし，$\mathcal{I}$ は

$$\xi' = \frac{2\xi}{3}, \quad \xi' = \frac{2\xi+1}{3}$$

のアトラクター集合でもあり，$\mathcal{I}$ の相似次元は，$\log 2/\log(3/2) \cong 1.709511$ となる．後者の場合，像の内部の重なりがあり，これらの重なりの部分は，2度「数えられる (counted)」．すべての $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$\mathfrak{F}_{i*}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ となり，また，内部を重なりから避けるため，$i \neq j$ に対して $\mathfrak{F}_{i*}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{F}_{j*}(U) = \emptyset$ となるように開集合 $\mathcal{U}$ が存在するならば，これは起こり得ないことを示すことができる．(これは，**モーランの開集合条件** (Moran's open set condition) と呼ばれる.）このような場合，相似次元は，**ハウスドルフ次元**に等しい．これは，集合自身に結びつけられ，それを生成する過程に結びつけられていない概念である (Barnsley[1] の第5章, Edgar[1] の第6章)．ところでハウスドルフ次元は，常に位相次元より大きいか等しく，また，相似次元より小さ

いか等しい (Edgar[1], p.156).

今，9.1 節のフラクタルの相似次元を計算してみよう．

カントール集合：カントール集合を生成する上で，各ステップで，前の結果が $r = 1/3$ 比に縮小され，繰り返しの各ステップで前の配図の 2 つの縮小コピーを作る $n = 2$ の相似変換が存在する．したがって，

$$s(\textbf{カントール集合}) = \frac{\log(2)}{\log(3)} \cong 0.6309296$$

となる．($\mathcal{U} = (0,1)$ にとるならば，$\mathfrak{F}_{1*}(\mathcal{U}) = (0,1/3), \mathfrak{F}_{2*}(\mathcal{U}) = (2/3,1)$ となる．これらの 2 つの集合は，$\mathcal{U}$ に含まれ，結合していない．したがって，カントール集合のハウスドルフ次元も $\log(2)/\log(3)$ である．) カントール集合の位相次元は，カントール集合がいかなる開区間を含まず，したがってその点が移動できないので，対照的に 0 である．

フォン・コッホ曲線：各ステップにおいて，前の配図は，1/3 比で縮小しており，$n = 4$ 個のコピーが作られる．すなわち，

$$s(\textbf{フォン・コッホ曲線}) = \frac{\log(4)}{\log(3)} \cong 1.261859$$

である．(図 8.3.3 の初期三角形の内部にあるように $\mathcal{U}$ をとるならば，相似次元とハウスドルフ次元が同じであることがわかる)．フォン・コッホ曲線は，位相次元 1 を持ったジョルダン曲線である．

シェルピンスキー・ガスケット：各ステップにおいて，配図は，1/2 比で縮小しており，$n = 3$ 個のコピーが作られる．すなわち，

$$s(\textbf{シェルピンスキー・ガスケット}) = \frac{\log(3)}{\log(2)} \cong 1.584963$$

である．(相似次元とハウスドルフ次元が同じかどうかを調べるため，$\mathcal{U}$ を初期三角形の内部にとろう)．シェルピンスキー・ガスケットの位相次元は 1 である．

修正シェルピンスキー三角形：縮小率が 1/3 であり，あらゆるステップで，6 個のコピーを保つ．したがって，相似次元は，

$$s(\textbf{修正シェルピンスキー三角形}) = \frac{\log(6)}{\log(3)} \cong 1.63093$$

によって与えられる．また，読者は，相似次元がハウスドルフ次元に等しいことを簡単に確かめられる．

これらの値は，直観とかなり一致していることがわかる．シェルピンスキー・ガスケットの相似次元は，フォン・コッホ曲線の相似次元より実際大きく，また，修正シェルピンスキー三角形の相似次元は，シェルピンスキー・ガスケットの相似次元より大きい．

ヒルベルト曲線 と **ペアノ曲線**：ヒルベルト曲線の場合には，1/2 比で縮小し，4 つのコピーを作る．また，ペアノ曲線の場合には，1/3 比で縮小し，9 個のコピーを作る．したがって，驚くこともなく，

$$s(\textbf{ヒルベルト曲線},\ \textbf{ペアノ曲線}) = \frac{\log(1/r^2)}{\log(1/r)} = 2$$

である．(再び，初期正方形の内部を $\mathcal{U}$ とすることにより，相似次元とハウスドルフ次元は同じである．この場合，位相次元も 2 である．そこで，すべて 3 つの次元は一致する．)

シェルピンスキー曲線：$1/\sqrt{2}$ 比で縮小し，2 つのコピーを作ると，

$$s(\textbf{シェルピンスキー曲線}) = \frac{\log 2}{\log\sqrt{2}} = 2$$

を得る．(モーラン条件を調べるため，$\mathcal{U}$ に対して初期三角形の内部をとる．前の場合と同様に，相似次元，ハウスドルフ次元，位相次元は同じである．)

純粋主義者 (purist) のみが，用語**フラクタル** (fractal) を非整数次元の集合に対して使う．そうすると，ヒルベルト型の空間充填曲線は，フラクタルにならない．他の極端なものとして，完備距離空間のあらゆる空でないコンパクト集合をフラクタルと考える人々がいる．フラクタルの定義には，様々な努力がなされてきた．この問題の追求は，本書の目的から外れており，フラクタルに関係する論文に属すべきことであろう．そこで，人はそれを偶然見つけるかもしれない．

§9.5 カントール曲線

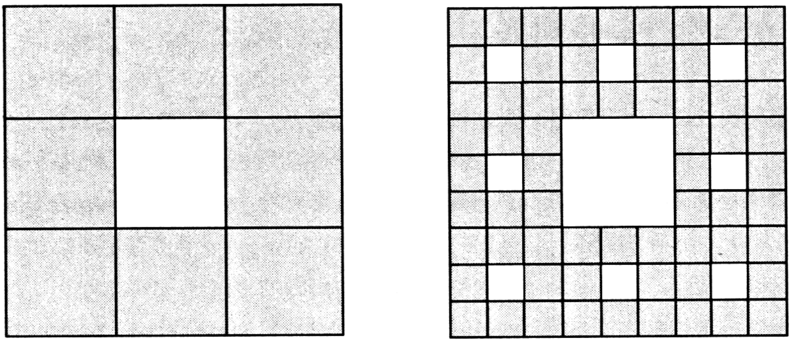
最も興味ある自己相似フラクタルは，**正方形カーペット** (square carpet) であり，**シェルピンスキー・カーペット** (Sierpiński carpet) あるいは**シェルピンスキー連続体** (Sierpiński continuum) として参照される (Sierpiński[6]). シェルピンスキー (Sierpiński[5]) は，「マズルキーウィッチがすでにこの例を見つけたが，よくわからない理由でそれを決して発表しなかった」ことを最後の段落において述べた（'Jusqu'à présent M. Mazurkiewicz ne publia pas son exemple et sa démonstration m'est inconnue' — Sierpiński[7], p.632 も参照）. それを**マズルキーウィッチ連続体** (Mazurkiewicz continuum) と呼ぼう．単位正方形から始め，それを 9 個の合同正方形に分割し，真ん中の正方形を取り除く．それから，残りの 8 個の正方形において真ん中の正方形を取り除く，などなどである．最初の 2 ステップは，図 9.5.1 に図示される．図 9.5.1a において分割された 5 回目の繰り返しは，Apple Macintosh コンピュータ上で N. J. ローズによって彼自身のプログラムを使って作られた．縮小率は，1/3 であり，8 個のコピーが，あらゆるステップで作られる．したがって，

$$s(\text{マズルキーウィッチ連続体}) = \frac{\log(8)}{\log(3)} \cong 1.892789$$

である．（モーランの開集合条件が明らかに正方形の内部で $\mathcal{U}$ として合うので，ハウスドルフ次元は同じである.）

マズルキーウィッチ連続体の 2 次元ルベーグ測度は，取り除かれる集合の容量とトレマの容量の比が定数であるので 0 である．

平面曲線の理論に関連して，マズルキーウィッチ連続体の重要性を説明するため，**カントール曲線** (Cantor curve) の意味するものを最初に述べよう．これは，$\mathbb{E}^2$ においていたるところ稠密でない $\mathbb{E}^2$ 内の**連続体** (continuum)（少なくとも 2 点を含むコンパクト連結集合）である.（集合は，その部分集合のいずれも $\mathbb{E}^2$ の任意の開部分集合において稠密でなければ，$\mathbb{E}^2$ においていたるところ稠密でない.）明らかにカントール曲線は，正方形を含まない．したがって，空間充填曲線はカントール曲線ではない．一方，図 6.3.1 における集



9.5.1　マズルキーウィッチ連続体の生成

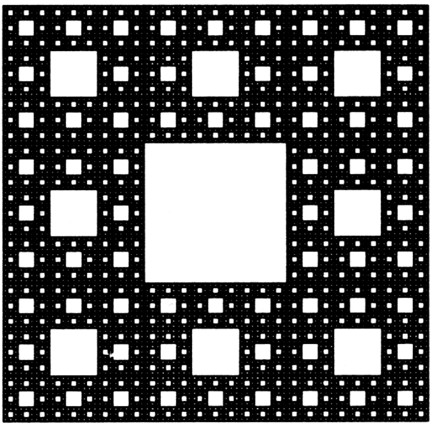


図 9.5.1a　マズルキーウィッチ連続体の生成における第5ステップ

合は，カントール曲線である．これは，正方形が曲線であるが，図 6.3.1 の集合はそうでないという，定義 1.3.2 に対するはっきりした差異である．各カントール曲線は，マズルキーウィッチ連続体の部分集合に同相であることがわかる．このことから，マズルキーウィッチ連続体はよく**万有平面曲線** (universal plane curve) と呼ばれる (Blumenthal and Menger[1], p.431)．

再び，マズルキーウィッチ連続体を生成する適当な反復関数系を見つけることを，演習問題として読者に残しておこう．

マズルキーウィッチ連続体の3次元への一般化を考えよう（マンデルブロー(B. B. Mandelbrot[1]) が，**シェルピンスキー・スポンジ** (Sierpiński sponge) として参照している）．これは，また，**メンガー・スポンジ** (Menger sponge) としても知られている．単位立方体 $\mathcal{W}$ から，それを27個の合同部分立方体に分割し，最初のステップで，真ん中の立方体とすべての6つの面にある真ん中の立方体を取り除くことにより得られる．次のステップで，残った20個の立方体のそれぞれに対して同じようにする，などなどである.（図9.5.2を参照. これは，W.H. Freeman and Company出版社から許可を得て，Blumenthal and Menger[1] から転載したものである.）

縮小率が1/3なので，また，20個のコピーが各ステップで作られるので，相似次元は，

$$s(\textbf{シェルピンスキー・スポンジ}) = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2.726833$$

である．モーランの開集合条件が明らかに $\mathcal{W}$ の内部として，$\mathcal{U}$ と合うので，ハウスドルフ次元は，相似次元と同じである．しかし，シェルピンスキー・スポンジの位相次元は，ほんの1である．事実，$\mathbb{E}^3$ の各カントール曲線は，シェルピンスキー・スポンジの部分集合に同相である．$\mathbb{E}^3$ 内のカントール曲線 $\mathcal{C}$ は，各点 p に対して，p の各近傍が，近傍 $\mathcal{N}$ を含む性質を持った連続体である (Blumenthal and Menger[1], p.439)．ここで，$\mathcal{N}$ は，$\mathcal{N}$ 内にない $\mathcal{N}$ のすべての集積点の集合と $\mathcal{C}$ との共通部分が，$\mathcal{C}$ の部分連続体を含まないという性質を持っている．これは，前で定義した $\mathbb{E}^2$ 内のカントール曲線の概念の一般化である．$\mathbb{E}^2$ において，2つの概念が一致する（Blumenthal and Menger[1], pp. 481, 493. カントール曲線の前定義の $\mathbb{E}^3$ への直接の一般化が，2次元平面を含む概念に発展したことに注意されたい.）距離空間におけるあらゆるカントール曲線が，$\mathbb{E}^3$ 内のカントール曲線に同相であるので，あらゆるカントール曲線がシェルピンスキー・スポンジの部分集合に同相であることがわかる (Blumenthal and Menger[1], pp.501–506)．このことから，シェルピンスキー・スポンジも**万有曲線** (universal curve) として参照される．ジョルダン曲線はカントール曲線であるので，特に，あらゆるジョルダン曲線がシェルピンスキー・スポンジの部分集合に同相であること

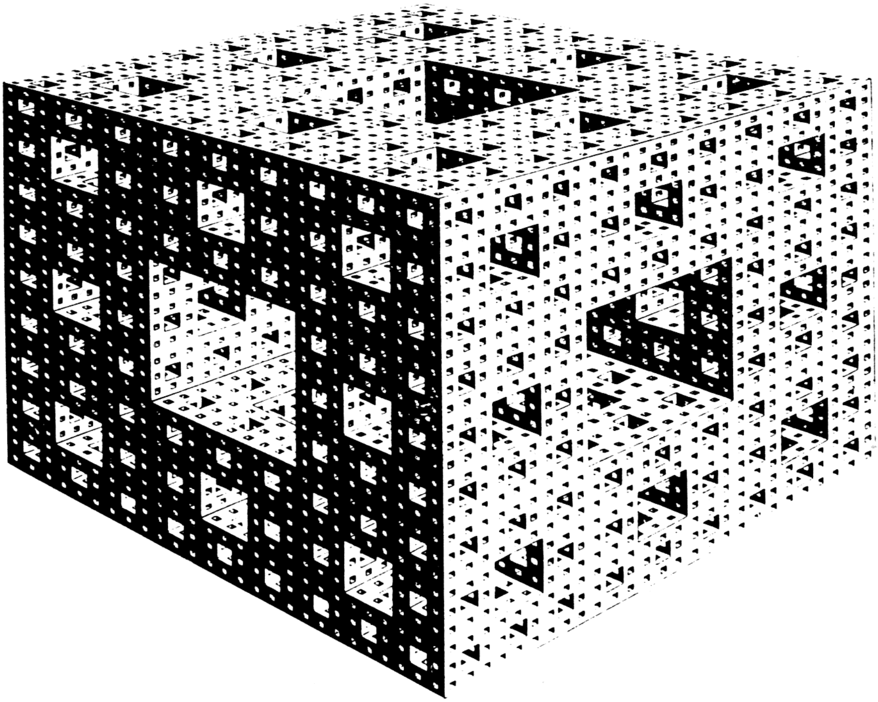


図 9.5.2　シェルピンスキー・スポンジの生成における第 4 ステップ

がわかる．トレマの容量と取り除かれる集合の容量との比が定数である前の場合と同様に，3 次元のルベーグ測度に対して，

$$\Lambda_3(\textbf{シェルピンスキー・スポンジ}) = 0$$

を得る．適当な反復関数系の設定は，演習問題として読者に残しておく．

§9.6　ハイウェイ・ドラゴン

1967 年頃，ジョン・E. ハイウェイは，カリフォルニア州アーバイン大学の物理学者であるが，群論に関する NASA セミナーで，最も注目すべきフ

ラクタルの作図法を提案した．ここで，彼はこの曲線をドラゴンと名づけた (Gardner[1], Edgar[1], Davis and Knuth[1], [2] を参照）．したがって，その名は，**ハイウェイ・ドラゴン** (Heighway dragon) である．

ハイウェイ・ドラゴンは，次の反復関数系

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.6.1}$$

を区間 $\mathcal{I}$ に適用することによって得られる．最初の 5 ステップを図 9.6.1 に図示する．ここでは，初期多角形を $\mathcal{I}$，すなわち,$\mathcal{P}_0$ とし，次のものを $\mathcal{P}_1$ とし，などなどとする．

すべての近似多角形がいかに (0,0) から始まり，(1,0) に終わるかを見よう．(図 9.6.2 の描画は，ニコラス・J. ローズによる．彼は，自分のプログラムを使って Apple Macintosh コンピュータでそれらを生成した.）

1/2 の縮小率で，各ステップで作られた 4 つのコピーによって，相似次元

$$s(\textbf{ハイウェイ・ドラゴン}) = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2$$

を得る．ハイウェイ・ドラゴンの相似次元が 2 であるという事実は，空間充填曲線になっていることを保証するものではない．しかし，その事実を主要な候補として，後での議論で明らかになるように，辺長 1/16 の少なくとも 1 つの閉である正方形を含むので，実際に空間を充填しているのである．

$\mathcal{P}_4$ は,（$1/2 \le \xi \le 9/6$, $-1/4 \le \eta \le -3/16$ によって表された真ん中の正方形を持った）図 9.6.2(a) に分割されたような配図を少なくとも 1 つ含む．中央の正方形を $\mathcal{Q}_4$ としよう．$\mathcal{P}_5$ において，$\mathcal{Q}_4$ は，再び 4 つの合同な部分正方形に分割され，それぞれの部分正方形は，図 9.6.2(a) のような配図の中

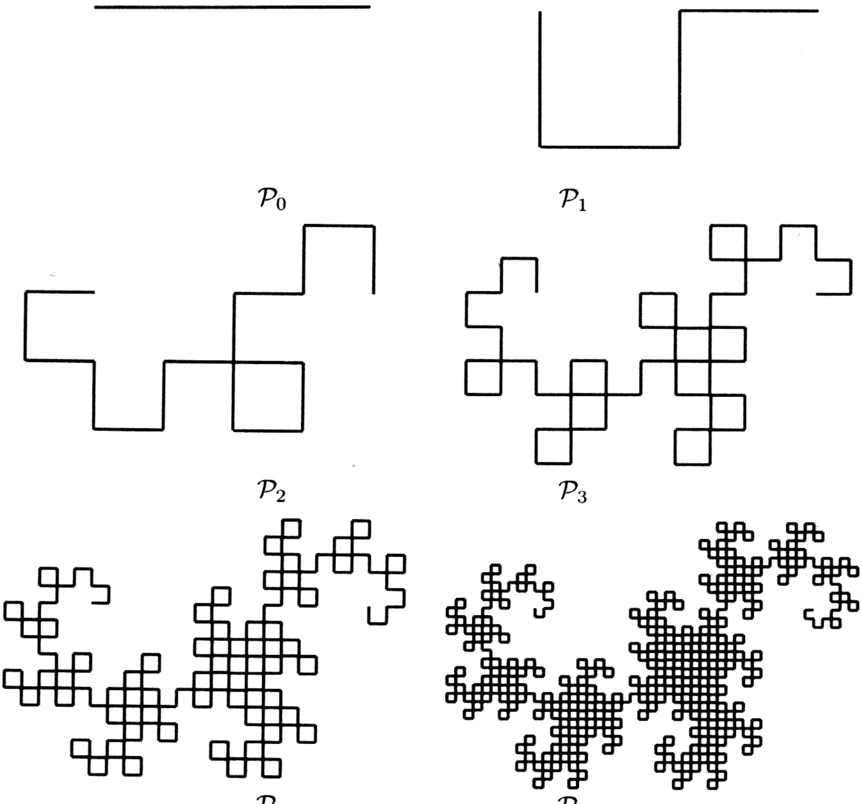


図 9.6.1　ハイウェイ・ドラゴンに対する近似

央の正方形である．これは，図 9.6.2(b) に描かれる．そこで，これらの 4 つの中央の正方形の各々は，再び $\mathcal{P}_6$ に現れる．ここで，それらは，4 つの合同な部分正方形に分割され，それぞれは，その辺の各々がくっついた同じ大きさの正方形を持つ．このことが，無限に繰り返される．x は，辺長 1/16 の Q_4 に含まれる点を表すとし，$x_4 \in \partial Q_4$ としよう（∂Q_j を集合 Q_j の境界を表す）．x は，Q_4 の 4 つの部分正方形の 1 つ（またはそれ以上）に存在する．それを Q_5 としよう．Q_5 は，辺長 1/32 を持つ．$x_5 \in \partial Q_5$ としよう．

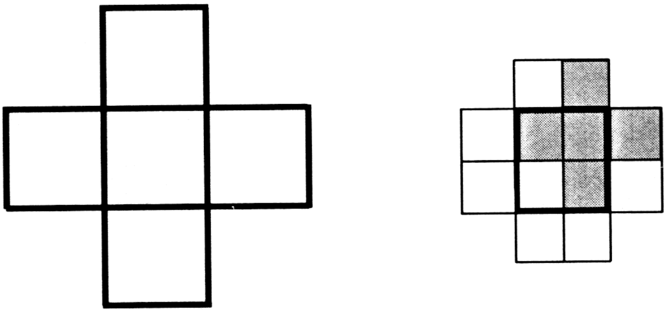


図 9.6.2 $\mathcal{P}_4$ と $\mathcal{P}_5$ の部分

x は，Q_5 の 4 つの部分正方形の 1 つ（またはそれ以上）に存在する．それを Q_6 としよう．Q_6 は，辺長 1/64 を持つ．$x_6 \in \partial Q_6$ としよう．この過程を無限回繰り返す．作り方により，$x_j \in \partial Q_j \subset \mathcal{A}$ を得る．ここで，$\mathcal{A}$ は，アトラクター集合を表し，$\lim_{n\to\infty} x_j = x$ である．定理 9.3.3 によって，$\mathcal{A}$ は閉であり，したがって，$x \in \mathcal{A}$ となる．x は Q_4 内の任意の点だったので，$Q_4 \subset \mathcal{A}$ となることがわかる． □

ハイウェイ・ドラゴンは，よく知られた空間充填曲線の修正や一般化や特殊化でなく，数学界で現れる最新のオリジナルな空間充填曲線であるように思う．

第 2 章から第 5 章まで議論した空間充填曲線に対する近似多角形の場合によく起こったが，ドラゴン曲線の生成過程は，その曲線がそれ自身に衝突したりすることによってわからなくなる．その曲線がそれ自身と交叉しないように，また，折り曲げないようにするため，角を丸めている．図 9.6.3（Davis and Knuth[1], p.69 の図 4 のコピーであり，著者の許可を得て転載している）では，丸めた角を持った $\mathcal{P}_6$ を示している．図 9.6.3 は，また，ドラゴン曲線の名前の由来を示している．フォスが言ったように，フォン・コッホ曲線が初期の数学的怪物の 1 つならば，ハイウェイ・ドラゴンは，最新の数学的怪物の 1 つである！

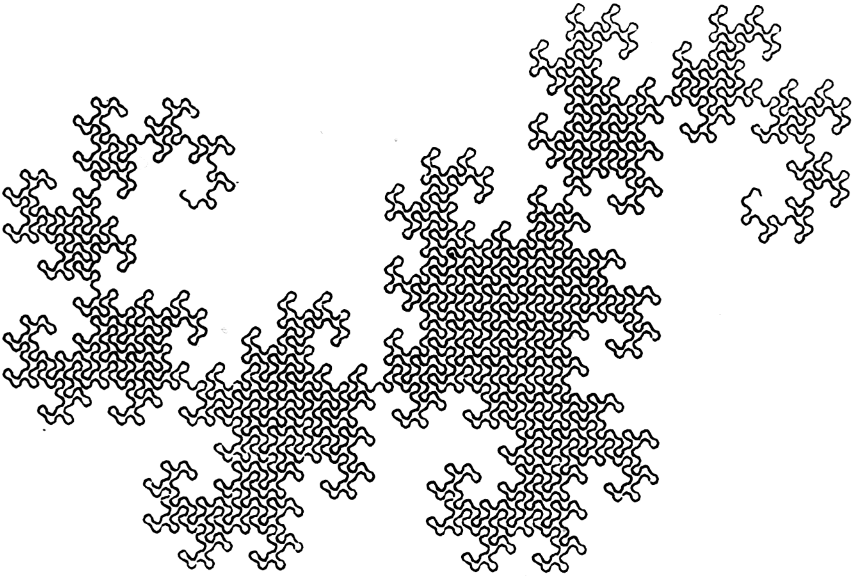


図 9.6.3　丸め角を持った $\mathcal{P}_6$

§9.7　問題

1. カントール集合は任意の開区間を含まないことを示しなさい．
2. U を $m \times m$ の直交行列とし，$x' = rUx + b$ としよう．ここで，$x, x', b \in \mathbb{E}^m$, $r \in \mathbb{R}$ である．$||x'_1 - x'_2|| = r||x_1 - x_2||$ を示しなさい．
3. 初期集合 $\mathcal{A}_0 = \{\xi \in \mathbb{R} | \xi = 2\}$ に対して，反復関数系 (9.1.1) 式を適用し，また，数回の反復を行いなさい．中間結果を描画しなさい．
4. 反復関数系 (9.1.2) 式と初期集合 $\mathcal{A}_0 = \mathcal{T}$ に対して，問題 3 を繰り返しなさい．
5. 反復関数系 (9.3.1) 式と初期集合 $\mathcal{A} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{E}^2 | \eta = \sin(\pi\xi/2), 0 \leq \xi \leq 2\}$ に対して，問題 3 を繰り返しなさい．
6. 命題 9.2.2 を証明しなさい．
7. $r_1^s + r_2^s + \cdots + r_n^s = 1$ と $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$ ならば，$s =$

$\log(n)/\log(1/r)$ となることを示しなさい．

8. $r_1^s + r_2^s + \cdots + r_n^s = 1$（ただし，$r_i \in (0,1)$）が一意解 s を持つことを示しなさい．
9. 4.6 節のポーヤ曲線の相似次元を求めなさい．
10. $\mathcal{A}_n = \{x \in S | \rho(1/n, x) \leq 1\} \in K(S)$ としよう．$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n$ を求めなさい．
11. $\mathcal{A}_n = \{x \in S | \rho(0, x) \leq 1 + (1/n)\} \in K(S)$ としよう．$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n$ を求めなさい．
12. 9.1 節の修正シェルピンスキー三角形を生成する反復関数系を求めなさい．

13. 9.5 節のマズルキーウィッチ連続体（正方形カーペット）に対して，問題 12 を繰り返しなさい．
14. 9.5 節のシェルピンスキー・スポンジに対して，問題 12 を繰り返しなさい．
15. $\mathcal{I}$ を図 9.7 の配図上に写像する反復関数系を求めなさい．いくつかの反復で描画し，(2 次フォン・コッホ曲線と呼ばれる）このフラクタルの相似次元を計算しなさい．

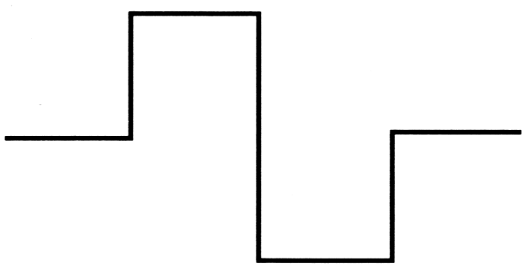


図 9.7　2 次フォン・コッホ曲線の第 2 反復

16. 反復関数系 (9.6.1) 式は，ヒルベルト曲線をパラメータ化するのに 2.3 節で用いた方法や，また，シェルピンスキー曲線をパラメータ化するのに

4.3 節で用いた方法によって，ハイウェイ・ドラゴンをパラメータ化するのには使えない．その理由を説明しなさい．

17. 問題 6.26 のカントール・ブラシは，カントール曲線か？　読者の答えを示しなさい．

18. 反復関数系

$$x' = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} x,$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

が，$\mathcal{I}$ に適用されるとき，5.3 節の悪魔の階段を生成することを示しなさい．(これは，キースベッター曲線 (Kieswetter curve) の特殊な場合である．より詳しくは，Kuttler[1] を参照.)

19. 反復関数系

$$x' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x, \qquad x' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は，高木曲線を生成する．$\mathcal{I}$ に適用し，2, 3 回の繰り返しをスケッチしなさい．

20. 反復関数系

$$x' = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

に対して，問題 19 を繰り返しなさい．これは，ボルツァーノ–コワレフスキ曲線 (Bolzano-Kowalewski curve) を生成する．

付録

A.1. 計算機プログラム

ヒルベルト曲線，ペアノ曲線，シェルピンスキー曲線の節点の座標を計算するのに使われる次の 3 つのプログラムは，独立変数 $t \in [0,1]$ の値を文字列変数として入力する．ヒルベルト曲線とシェルピンスキー曲線の計算には，4 進数の形で入力を必要とし，ペアノ曲線の計算には，3 進数の形で入力を必要とする．しかし，計算機は，変換サブルーチンを含めなければ，そのような形の入力を認識できない．これは，プログラムを複雑化し，より流れを悪くする．1 数字ずつを続けて取り出し，それを数値に変換する．ペアノ曲線のプログラムでは，出力は 3 進数の形であり，それゆえ，出力も文字列変数である．プログラムを簡単にするため，**失敗に対応する策を講じる** (fail-safe) 機能をまったく含んでいない．規則違反の入力が退けられないので，不確かな結果を生じるだろう．

A.1.1. ヒルベルト曲線の節点の計算

IBM の PC パーソナル・コンピュータの BASIC のプログラム 1 は，(2.4.3) 式を評価することによって，ヒルベルト曲線の節点の座標を求める．変数 t は，$0.t_1t_2t_3\ldots t_n$ の形で入力する．ここで，最初の 0 の後の点は，4 進数点として理解されるべきものであり，$n \leq 253$ である．倍精度で，分母に 2^n の値を持つ分数の形をした出力は，$n \leq 53$ の精度である．

プログラム 1
((2.4.3) 式の評価のため)

```
10   DEFDBL F,G,W
20   K=0:D=0:Q=0:E0=0:E3=0:F=0:G=0
30   PRINT ‘‘Enter t in quaternary form (such as,
       for example, 0.0312)’’
40   INPUT X$
50   N=LEN (X$)−2
60   Q$ = MID$ (X$,K+3,1)
70   Q=VAL (Q$)
80   K=K+1:N=N−1
90   F=F+(−1)^E0 * ((1−D)*Q−1)*SGN(Q)*2^N
100  G=G+(−1)^E0 * (1−D*Q)*SGN(Q)*2^N
110  IF N=0 THEN 200
120  IF Q=0 THEN 150
130  IF Q=3 THEN 170
140  GOTO 180
150  E0=(E0+1) MOD 2
160  GOTO 180
170  E3=(E3+1) MOD 2
180  D=E0+E3 MOD 2
190  GOTO 60
200  W=2^K
210  PRINT ‘‘f(‘‘+X$ +’’) = ‘‘;F;’’/’’;W
220  PRINT ‘‘g(‘‘+X$ +’’) = ‘‘;G;’’/’’;W
```

このプログラムにおいて，Q は q_j を，E0, E3 は e_{0j}, e_{3j} を，D は d_j を，F, G は φ_h, ψ_h を表す．

図 2.1.1 と図 2.1.2 の近似多角形をプロットするプログラムは，Wirth([1], pp.132, 133) で見つけられる．

A.1.2. ペアノ曲線の節点の計算

IBM の PC パーソナル・コンピュータの BASIC のプログラム 2 は，(3.1.1) 式を評価することによって，ペアノ曲線の節点の座標を求める．変数 t は，$0.t_1t_2t_3\ldots t_n$ の形で入力する．ここで，最初の 0 の後の点は，3 進数点を表し，$n \leq 253$ である．入力と出力は，両方とも文字列変数として扱うので，出力は，$n \leq 253$ の精度である．要素 φ_p と ψ_p の計算には，同じルーチン（行番号 60–140）を使っている．両方とも同じ手続きによって計算されるので，このようにした．最初の要素 φ_p の計算には，3 進数点後の最初の数字 (K $=$ 0) から処理を開始し，第 2 の要素 ψ_p の計算には，3 進数点後の 2 番目の数字（行番号 170 の K=1）を処理する．また，K=0 に対しては，行番号 60 において，B$ = “.” のとき，VAL(B$) $=$ 0 である．

プログラム 2

((3.1.1) 式の評価のため)

```
10   PRINT ‘‘Enter t in ternary form (such as,
       for example, 0.2102)’’
20   INPUT X$:Z$=X$
30   B=0:F$=‘‘0 .’’:I=I+1
40   N=LEN (Z$):  M=N MOD 2:IF M=I MOD 2 THEN 60
50   N=N+1:X$=Z$ + STR$(0)
60   B$=MID$(X$,K+2,1):B=B+VAL(B$)
70   A$=MID$(X$,K+3,1):A=VAL(A$)
80   E=B MOD 2:IF E=0 THEN 100
90   A=2-A
100  F$=F$ +STR$(A)
110  K=K+2:N=N-2:IF N<=I THEN 130
120  GOTO 60
130  IF E=0 THEN 150
140  F$=F$ + ‘‘ 2 2 2. . .’’
150  ON I GOTO 160, 180
```

```
160   PRINT ``f(``+Z$ +'') = ''+F$:X$=Z$
170   K=1:GOTO 30
180   PRINT ``g(``+Z$ +'') = ''+F$
```

上述のプログラムにおいて，A は t_{2j+1}（ただし，$j = 0, 1, 2, \ldots$）を表し，B は $t_0 = \mathrm{VAL}(``.") = 0$ を持った t_{2j}（ただし，$j = 0, 1, 2, \ldots$）を表し，F, G は φ_p, ψ_p を表す．

A.1.3. シェルピンスキー–クノップ曲線の節点の計算

IBM の PC パーソナル・コンピュータの BASIC のプログラム 3 は，(4.3.4) 式を評価することによって，シェルピンスキー–クノップ曲線の節点の座標を求める．変数 t は，$0.q_1q_2q_3\ldots q_n$ の形で入力する．ここで，$n \leq 253$ であり，最初の 0 の後の点は，4 進数点を表す．結果は，プログラム 1 よりわずかによい，$n \leq 54$ の精度である．

プログラム 3
((4.3.4) 式の評価のために)

```
10    DEFDBL F,G,W
20    K=0:D=0:Q=0:E=0:F=0:G=0
30    PRINT ``Enter t in quaternary form (such as,
        for example, 0.0312)''
40    INPUT X$
50    N=LEN(X$)-2
60    Q$=MID$(X$,K+3,1)
70    Q=VAL(Q$)
80    K=K+1:N=N-1
90    F=F+(-1) ^ E*((1-D)*(1+(-1) ^ D)+(D-2)*(1+(-1)
        ^ Q)*(1-(-1) ^ D)/2)* SGN (Q)*2 ^ (N-1)
100   G=G+(-1) ^ E*((2-D)*(1-(-1) ^ D)+(1-D)*(1+(-1)
        ^ Q)*(1+(-1) ^ D)/2)* SGN (Q)*2 ^ (N-1)
```

```
110    IF N=0 THEN 180
120    IF Q=2 THEN 150
130    IF Q=1 THEN 160
140    GOTO 170
150    E=(E+1) MOD 2
160    D=(D+1) MOD 4
170    GOTO 60
180    W=2 ^ (K−1)
190    PRINT ‘‘f(‘‘+X$ +’’) = ‘‘;F;’’/’’;W
200    PRINT ‘‘g(‘‘+X$ +’’) = ‘‘;G;’’/’’;W
```

上述のプログラムにおいて，Q は q_j を，E は η_j を，D は δ_j を，F, G は φ_s, ψ_s を表す．

図 4.1 のオリジナルなシェルピンスキー曲線の近似多角形をプロットするプログラムは，Wirth[1](pp.136, 137) を参照されたい．

A.1.4. シェーンベルク曲線の近似多角形をプロットするプログラム

次の 2 つのプログラムは，シェーンベルグ曲線の s_n 近似多角形と a_n 近似多角形のグラフを生成する．s_n 近似多角形は，(7.3.2) 式によって定義され，a_n 近似多角形は，(7.3.4) 式によって定義される．

プログラム 4
(s_n 近似のグラフを生成)

```
 10    DEFDBL T,X,Y
 20    CLS:PRINT:Enter n = ’’;:INPUT N:SCREEN 2:
         PSET (0,198):M=1
 30    DEF FNA(T)=(3*T−1)*(SGN(SGN(3*T−1)+1)
         −SGN(SGN(3*T−2)+1))
 40    DEF FNB(T)=SGN(SGN(3*T−2)+1)−SGN(SGN(3*T−4)+1)
```

```
50   DEF FNC(T)=(5-3*T)*(SGN(SGN(3*T-4)+1)
        -SGN(SGN(3*T-5)+1))
60   DEF FND(T)=FNA(T)+FNB(T)+FNC(T)
70   X=0:Y=0:T=M/(3 ^ N):K=0
80   X=X+FND(T)/(2 ^ (K+1)):T=3*T:T=T-2*INT(T/2)
90   Y=Y+FND(T)/(2 ^ (K+1)):K=K+1:IF K>INT(N/2)THEN 110
100  T=3*T:T=T-2*INT(T/2):GOTO 80
110  X=X+(M-2*INT(M/2))/(2 ^ K)):Y=Y+(M-2*INT(M/2))/(2 ^ K)
120  LINE -(480*X,198-198*Y), 1
130  M=M+1:IF M>3 ^ N THEN 150
140  GOTO 70
150  IF INKEY$= ‘‘ ’’ THEN 150
160  END
```

このプログラムは，左マージンで 199 画素下がり，(0,198) に原点をおいている．(7.1.1) 式から生成関数 p は，単位ステップ

$$u(t,a) = \mathrm{sgn}(\mathrm{sgn}(t-a)+1)$$

を利用することによって，行番号 30–60 の 4 つの分割式で定義されている．行番号 80 と 100 において，t は，$t = t - 2 * \mathrm{int}(t/2)$ によって，modulo 2 に縮小される．ポテンシャル頂点 (potential vertex) は，$t = m/3^n$（ただし，$m = 0, 1, 2, \ldots, 3^n$）で生じている．x, y は，行番号 80–110 において，t の各値に対して (7.3.1) 式によって評価され，また，行番号 120 において，各頂点は，直線によって直前のもの (predecessor) に結合されている．$n = 7$ 以上に対して，線分は，近似多角形を見きわめることがますます困難になるほど稠密になる．

次のプログラムは，いくつかの簡単な変更によって，プログラム 4 から得られる．行番号 90 と 100 の x と y の評価は，プログラム 4 の行番号 80 と 90 に同じである．しかし，余りの項は，プログラム 4 の行番号 110 にあるが，つけ加えられていない．

プログラム 5

(a_n 近似のグラフの生成)

```
10    DEFDBL T,X,Y
20    CLS:PRINT:Enter n = '';:INPUT N:SCREEN 2:
        PSET (0,198):M=1
30    P=2*N
40    DEF FNA(T)=(3*T-1)*(SGN(SGN(3*T-1)+1)
        -SGN(SGN(3*T-2)+1))
50    DEF FNB(T)=SGN(SGN(3*T-2)+1)-SGN(SGN(3*T-4)+1)
60    DEF FNC(T)=(5-3*T)*(SGN(SGN(3*T-4)+1)
        -SGN(SGN(3*T-5)+1))
70    DEF FND(T)=FNA(T)+FNB(T)+FNC(T)
80    X=0:Y=0:T=M/(3 ^ P):K=0
90    X=X+FND(T)/(2 ^ (K+1)):T=3*T:T=T-2*INT(T/2)
100   Y=Y+FND(T)/(2 ^ (K+1):K=K+1:IF K>N-1 THEN 120
110   T=3*T:T=T-2*INT(T/2):GOTO 90
120   LINE -(480*X,198-198*Y),1
130   M=M+1:IF M>3 ^ P THEN 150
140   GOTO 80
150   IF INKEY$=`` '' THEN 150
160   END
```

A.2. 解析からの定理

A.2.1. 2 進数と他の表現

数字 0, 1 は **2 進数** (binary digits) と呼ばれる．$t \in (0,1)$ ならば，あらゆる $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} \leq t < \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

であるような2進数 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が存在し，任意のそのような数は，少なくとも1つ，また，せいぜい2つの2進表現

$$t = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots = 0_{\dot{2}} b_1 b_2 b_3 \ldots$$

を持つ．2進表現が有限 $t = 0_{\dot{2}} b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$，$b_n = 1$ であるならば，無限の2進表現 $0_{\dot{2}} b_1 b_2 b_3 \ldots (b_n - 1)\bar{1}$ に等しい．数1は，2進表現 $1 = 0_{\dot{2}}\bar{1}$ となる．同様の結果は，3進数，4進数，などなどの表現について成り立つ (Randolph[1], pp.29–34)．

A.2.2. 微分不可能性の条件

$f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ としよう．

$$\lim_{n \to \infty} (f(a_n) - f(b_n))/(a_n - b_n)$$

が存在しないような $0 < a_n \leq t < b_n < 1$ と $\{a_n\} \to t$，$\{b_n\} \to t$ を持った2つの列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が存在するならば，f は，t で微分可能**でない** (Randolph[1], p.365)．

A.2.3. ユークリッド空間の完備性

$a_n \in \mathbb{E}^m$ を持った $\{a_n\}$ は，**コーシー列** (Cauchy sequence) であり，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N(\varepsilon)$ が存在し，すべての $j, k > N(\varepsilon)$ に対して，$||a_j - a_k|| < \varepsilon$ が成り立つならば，$\lim_{k \to \infty} a_k = a$ となるような $a \in \mathbb{E}^m$ が存在する．このような性質を持つ空間は，完備と呼ばれる (Apostol[1](p.66)，Bartle[1](p.117)，Randolph[1](p.132)，Sagan[1](p.223))．

A.2.4. 一様収束

関数 $f_n : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$（ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$）が連続であり，$\{f_n\}$ が**一様に** $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ に収束する，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，t に独立なある $N(\varepsilon)$ が存在し，すべての $n > N(\varepsilon)$ に対して，$||f_n - f|| < \varepsilon$ が成り立

つならば，f は $\mathcal{I}$ 内で連続である (Apostol[1](p.394)，Randolph[1](p.309)，Sagan[1](p.275))．

A.2.5. 集合の減少列の交わりの測度

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ がルベーグ測度であり，$\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \mathcal{A}_3 \supset \ldots$ で，少なくとも 1 つの n に対して，$\Lambda(\mathcal{A}_n) < \infty$ であるならば，

$$\Lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(\mathcal{A}_n)$$

となる (Randolph[1], p.190)．

A.2.6. カントールの交わりの定理

$\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3 \supset \ldots$ ならば（ここで，$\mathcal{C}_n$ は，$\mathbb{E}^n$ の空でないコンパクト部分集合である），$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ は，閉じており，空でない．$n \to \infty$ のとき，径 $(\mathcal{C}_n) \to 0$ ならば，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ は，正確に 1 点を含む (Apostol[1](p.56), Bartle[1](p.88))．

A.2.7. 無限積

$0 \leq u_n < 1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束するならば，そのときに限り，$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0$ である (Apostol[1], p. 209)．

参考文献

Abend, K., Harley, T.J., Kanal, L.N.

[1] "Classification of binary random patterns," *IEEE Trans. Inform. Theory IT-11*, 538–544 (1965).

Alexanderson, G.L.

[1] "George Pólya: A Biographical Sketch," *The Pólya Picture Album*, Birkhäuser, Basel, 1987.

Alexandroff, P.

[1] "Über stetige Abbildungen kompakter Räume," *Mathem. Ann. 96*, 555–571 (1927).

Alsina, J.

[1] "The Peano Curve of Schoenberg is Nowhere Differentiable," *J. Approx. Theory, 33*, 28–42 (1981).

Apostol, T.M.

[1] *Mathematical Analysis*, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1974.

Bagemihl, F., Piranian, G.

[1] "Absolutely Convergent Power Series," *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös (Sect. Math.) III–IV*, 27–34 (1960/1961).

Barnsley, M.

[1] *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.

Bartholdi, J.J.III, Platzman, L.K.

[1] "On O(n log n) planar travelling salesman heuristic based on spacefilling curves," *Oper. Res. Lett. 1*, 121–125 (1982).

[2] "A fast heuristic based on spacefilling curves for minimum-weight matching in the plane," *Inf. Proc. Lett. 17*, 177–180 (1983).

[3] "Heuristics based on spacefilling Curves for combinatorial problems in euclidean space," *Management Science 34, No. 3 (March 1988)*, 291–305.

[4] "Spacefilling Curves and the Planar Travelling Salesman Problem," *J.A.C.M. 36, No. 4 (October 1989)*, 719–737.

Bartle, R.G.

[1] *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1967.

Beck, A., Bleicher, M.N., Crowe, D.W.

[1] *Excursions into Mathematics*, Worth Publishers, Inc., New York, 1969.

Bertsimas, D., Grigni, M.

[1] "Worst-Case Examples for the Spacefilling Curve Heuristic for the Euclidean Travelling Salesman Problem" *Oper. Res. Lett. 8*, 241–244 (1989).

Bially, Th.

[1] "Space-Filling Curves: Their Generation and Their Application to Bandwidth Reduction,"*IEEE Trans. Inform. Theory IT-15, No. 6 (November 1969)*, 658–664.

Biermann, Kurt, R.

[1] Eugen Netto, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 10*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, p. 24.

Blaschke, W.

[1] "Kreis und Kugel," *Jahresber. d. DMV 24*, 195– 207 (1914).

[2] *Kreis und Kugel*, 2nd ed., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956 (The 1st edition appeared in 1916).

Bliss, G.A., Dickson, L.E.

[1] "Biographical Memoir of Eliakim Hastings Moore," National Academy of Sciences of the United States of America, Biographical Memoirs, XVII—fifth memoir, Washington, DC, 1936, pp. 83–99.

Blumenthal, L.M., Menger, K.

[1] *Studies in Geometry*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1970.

Borel, É.

[1] *Éléments de la Théorie des Ensembles*, Éditions Albin Michel, Paris, 1949, pp. 279–286.

Bosznay, A.P.

[1] "A remark on a Paper of B.R. Gelbaum," *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, *36*, 353–355 (1978).

Bryc, W.

[1] "A remark on continuous independent functions," *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös (Sect. Math.) 26*, 13–16 (1983).

Bumby, R.T.

[1] "The Differentiability of Pólya's Function," *Adv. in Mathem.*, *18*, 243–244 (1975).

Butz, A.R.

[1] "Space Filling Curves and Mathematical Programming " *Inf. and Control 12*, 314–330 (1968).

[2] "Convergence with Hilbert's Space-Filling Curve," *J. Comp. and Syst. Sc. 3*, 128–146 (1969).

[3] "Alternative Algorithm for Hilbert's Space-Filling Curve," *IEEE Trans. Comp. (April 1971)*, 424–426.

Calinger, R.G.

[1] Eliakim Hastings Moore, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 9*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 501–503.

Cantor, G.

[1] "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre," *Crelle J.*, *84*, 242–258 (1878).

[2] "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten," *Math. Ann.*, *21*, 445–591 (1883).

Carathéodory, C.

[1] *Theory of Functions of a Complex Variable*, Chelsea Publishing Co., New York, 1964, p. 190.

Cesàro, E.

[1] "Sur la représentation analytique des régions, et des courbes qui les remplissent," *Bull. des Sc. Math., (2), 21*, 257–266 (1897).

[2] "Remarques sur la courbe de von Koch," *Atti della R. Academia delle Scienze fisiche e mathematiche, Napoli, Séries II, Vol. XII, No. 15*, 1–12 (1905).

[3] "Fonctions continues sans dérivées," *Archiv für Mathematik und Physik, Serie 3, Bd. X*, 57–63 (1906).

Cichoń, J., Morayne, M.

[1] "On Differentiability of Peano Type Functions III," *Proc. Am. Math. Soc.*, *92*, 432–438 (1984).

Davis, C., and Knuth, D.E.

[1] "Number representations and Dragon Curves I," *J. Recreational Mathem.*, *3*, 66–81 (1970).

[2] "Number representations and Dragon Curves II," *J. Recreational Mathem.*, *3*, 133–149 (1970).

Debski, W., Mioduszewski, J.

[1] "Simple plane images of the Sierpiński triangular Curve are nowhere dense," *Colloquium Mathematicum LIX*, 125–139 (1990).

Denjoy, A.

[1] "Sur la vie et l'oeuvre de Henri Lebesgue," *Institut de France, Academie des Sciences*, 1–30 (1946)(Lebesgue[3] の pp. 35–65 を参照).

Denjoy, A., Felix, L., Montel, P.

[1] "Henri Lebesgue: Le savant, le professeur, l'homme," *L'Enseignement mathém.*, t. III, fasc. 1, 1–18(Lebesgue[3] の pp. 67–84 を参照).

Devinatz, A.

[1] *Advanced Calculus*, Holt, Rinehart, Winston, New York, 1968, p. 253.

Dinghas, A.

[1] "Zur Peano Abbildung einer Strecke," *Israel J. of Math.*, *7*, 211–216 (1969).

Donoghue, W.F., Jr.

[1] "Continuous Function Spaces Isometric to Hilbert Space," *Proc. Am. Math. Soc.*, *8*, 1–2 (1957).

Edgar, G.A.

[1] *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990.

Engelking, R.

[1] *General Topology*, Polska Academia Nauk, Instytut Matematyczny, Monografie Matematyczne, Vol. 60, Warszawa, 1977.

Fréchet, M.

[1] "Sur quelques points du Calcul Fonctionell," *Rend. Palermo 27*, 1–74 (1906).

Freudenthal, H.

[1] David Hilbert, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 6*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 388–394.

[2] Konrad Knopp, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 7*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 411–412.

Gardner, M.

[1] "Mathematical Games," *Scientific American, 216 (March 1967)*, 124–125; *216 (April 1967)*, 118–120; *217 (July 1967)*, 115.

[2] *The unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, Simon and Schuster, New York, 1969, Chapter 19.

Garsia, A.M.

[1] "Combinatorial Inequalities and Smoothness of Functions," *Bull. Am. Math. Soc. 82*, 157–170 (1976).

Gelbaum, B.R. and Olmsted J.M.H.

[1] *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, Inc., San Francisco, 1965.

Gelbaum, B.R.

[1] "Independence of Events and of Random Variables," *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 36, 333–343 (1976).

Golomb, S.W.

[1] "Replicating Figures on the Plane," *Math. Gaz.*, *48*, 403–412 (1964).

Grattan-Guiness, I.

[1] "From Weierstrass to Russell: A Peano Medley," Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte, Atti del Convegno organizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 27–28 ottobre 1982, Torino, 1986.

Greenberg, M.

[1] *Lectures on Algebraic Topology*, W.A. Benjamin, New York, 1967, p. 82.

Hahn, H.

[1] "Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat," *Annali di Matematica, Serie III*, *XXI*, 33–55 (1913).

[2] "Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist," *J. Ber. d. DMV*, *23*, 318–322 (1914).

[3] "Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurven," *S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Abt. 2a (Math.) 123*, 2433–2487 (1914).

[4] "Über die stetigen Kurven der Ebene," *Mathem. Zeitschrift*, *9*, 66–73 (1921).

[5] "Über die Komponenten offener Mengen," *Fund. Math. 2*, 189–192 (1921).

[6] "Über irreduzible Kontinua," *S.-Ber. Öst. Akad. Wiss. Wien, Abt. 2a* (Math) *130*, 217–250 (1921).

[7] "Über stetige Streckenbilder," Atti del Congresso Internazionale dei Mathematici, Bologna, 3–10 September 1928, *VI*, 217–220.

[8] "Über die Anordnungssätze der Geometrie," *Monatsh. f. Math. u. Physik*, *19*, 289–303 (1908).

Hausdorff, F.

[1] *Set Theory*, Chelsea, New York, 1962.

Hawkins, T.

[1] Henri Léon Lebesgue, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 8*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 110–112.

Hilbert, D.

[1] "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück," *Math. Annln.*, *38*, 459–460 (1891).

[2] *The Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Company, La Salle, IL, 1938.

Hiriart-Urruti, J.-B.

[1] "Une courbe étrange venue d'ailleurs," *Revue de Mathematiques speciales (1986)*, 229–230.

Hlawka, E.

[1] "Über eine Klasse von Näherungspolygonen zur Peanokurve," *J. Number Theory*, *43*, 93–108 (1993).

Holbrook, J.R.

[1] "Stochastic Independence and Space-filling curves," *Am. Math. Monthly*, *88*, 426–432 (1981).

Hurwitz, A.

[1] "Über die Entwicklung der Allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit," Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897, B.G. Teubner, Leipzig, 1898.

Jessen, B.

[1] "Über eine Lebesgue'sche Integrationstheorie für Funktionen unendlich vieler Veränderlicher," C.R. du septième Congrès des mathematiciens scandinaves tenu à Oslo, 19–22 août 1929, 34–36.

Jordan, C.

[1] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome Premier, Troisiéme Édition, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[2] *l'Intermediaire des Mathematiciens*, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 23.

Kahane, J.-P.

[1] "Courbes étranges, ensembles minces," *Bull. de l'Asociation des Professeurs de Mathematiques (A.P.M.)*, *275/276*, 325–339 (1970).

Kamke, E., Zeller, K.

[1] "Konrad Knopp †," *Jahresber. d. DMV*, *60*, 44–49 (1957).

Kennedy, H.C.

[1] Giuseppe Peano, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 10*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 441–444.

Knaster, B.

[1] Stefan Mazurkiewicz, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 9*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 248–250.

Knopp, K.

[1] "Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und von Koch," *Arch. Math. Phys.*, *26*, 103–115 (1917).

Koch, H. von

[1] "Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire," *Arkiv for Matematik och Fysik*, *1*, 681–702 (1903–1904).

[2] "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes," *Acta Mathematica*, *29–30*, 145–174 (1905–1906).

Kowalewski, G.

[1] "Über Bolzano's nichtdifferenzierbare stetige Funktion," *Acta Math.*, *44*, 315–319 (1923).

Kuratowski, K.

[1] *Topology*, Vol. I, new edition, revised and augmented, Academic Press, New York, 1966.

[2] Waclaw Sierpiński, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 12*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 426–427.

[3] *A Half Century of Polish Mathematics*, Pergamon Press, Oxford, 1980.

Kuttler, J.R.

[1] "Nowhere-Differentiable Functions," *Am. Math. Monthly*, *99*, 565–566 (1992).

Lance, T. and Thomas, E.

[1] "Arcs with Positive Measure and a Space-filling Curve," *Amer. Math. Monthly*, *98*, 124–127 (1991).

Langford, C.D.

[1] "Uses of a geometric Puzzle," *Math. Gaz.*, *XXIV*, 209–211 (1940).

Lax, P.D.

[1] "The Differentiability of Pólya's Function," *Adv. in Mathem.*, *10, No. 3*, 456–464 (1973).

Lebesgue, H.

[1] *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904, pp. 44–45.

[2] "Sur les fonctions représentables analytiquement," *J. de Math.*, *6(1)*, 139–216 (1905).

[3] *Oeuvres Scientifiques*, Vol. I, L'Enseignement Mathématique, Institut de Mathématiques, Université de Genève, 1972.

Mandelbrot, B.B.

[1] *Fractals, Form, Chance, and Dimension*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1977.

Mayrhofer, K.

[1] "Hans Hahn †," *Monatsh. f. Mathem. u. Physik*, *41*, 221–238 (1934).

Mazurkiewicz, St.

[1] "O arytmetyzacji kontinuow," *C.R. Soc. Sc. Varsovie*, *VI*, 305–311 (1913) ("Sur l'arithmetisation des continus" というタイトルで，フランス語に翻訳されている Mazurkiewicz[6] の pp. 37–41 を参照).

[2] "O arytmetyzacji kontinuow *II,*" *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, *VI*, 941–945 (1913) ("Sur l'arithmetisation des continus II" というタイトルで，フランス語に翻訳されている Mazurkiewicz[6] の pp. 42–45 を参照).

[3] "Sur les lignes de Jordan", *Fund. Math.*, *1*, 166–209 (1913)(Mazurkiewicz[6] の pp. 76–113 を参照).

[4] "O punktach wielokrotnych krzywych wypelniajacych obszar plaski" ("Sur les points multiples des courbes qui remplissent une aire plane") *Prace Matematyczno-Fizyczne*, *XXV*, 113–120 (1914).

[5] "Sur une classification des points situés sur un continue arbitraire," *C.R. Soc. Sc. Varsovie*, *IX*, 441, 442 (1916).

[6] *Travaux de Topolgie et ses Applications*, PWN- Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1969.

Meschkowski, H.

[1] George Cantor, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 3*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 52–58.

Milne, St.C.

[1] "Peano Curves and Smoothness of Functions," *Adv. in Math.*, *35*, 129–157 (1980).

Mioduszewski, J.

[1] "Odwzorowania Peani, czyli o rozcinaniu a potem sklejaniu kwadratów i trójkatów" *Delta Popularny Miesiecznik Matematyczno-Fizyczny*, *7*, 1–4 (1977).

[2] "Peano Maps through Cuttings," *Center for Mathematical Culture, Special Issue (1990)*, 22–23.

Montel, P.

[1] "Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue," *C.R.T. 213, No. 5*, 197–200 (1942) (Lebesgue[3] の pp. 31–34 を参照).

Moore, E.H.

[1] "On certain crinkly curves," *Trans. Amer. Math. Soc.*, *1*, 72–90 (1900).

Morayne, M.

[1] "On Differentiability of Peano Type Functions," *Colloquium Mathematicum*, *LIII*, 129–132 (1987).

[2] "On Differentiability of Peano Type Functions II," *Colloquium Mathematicum*, *LIII*, 133–135 (1987).

Netto, E.

[1] "Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre," *Crelle J.*, *86*, 263–268 (1879).

Ohno, O. and Ohiyama K.

[1] "A catalog of symmetric self-similar space-filling curves," *J. Recreational Mathem.*, *23*, 161–173 (1991).

[2] "A catalog of non-symmetric self-similar space-filling curves," *J. Recreational Mathem.*, *23*, 247–254 (1991).

Olmsted, J.M.H.

[1] *Real Variables*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1959, p. 342.

Orman Quine, W. van

[1] "Peano as Logician," Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte, Atti del Convegno organizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 27–28 ottobre 1982, Torino, 1986.

Osgood, W.F.

[1] "On the Existence of the Green's Function for the most general simply connected plane region," *Trans. Am. Math. Soc.*, *1*, 310 (1900).

[2] "A Jordan Curve of positive Area," *Trans. Amer. Math. Soc.*, *4*, 107–112 (1903).

[3] *Funktionentheorie*, 1. Bd., Chelsea Publ. Co., New York, 1963, p. 171.

Patrick, E.A., Anderson, D.R., Bechtel, F.K.

[1] "Mapping Multidimensional Space to One Dimension for Computer Output Display," *IEEE Trans. Comp. C-17, No. 10 (October 1968)*, 949–953.

Peano, G.

[1] "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane," *Math. Annln.*, *36*, 157–160 (1890).

[2] *l'Intermediaire des Mathematiciens, Vol. 3*, Gauthier-Villars, Paris, 1896, p. 39.

Peitgen, H.-O., Richter, P.H.

[1] *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, New York, 1986.

Peitgen, H.-O., Saupe, D. (Editors)

[1] *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Piranian, G., Titus, C.J., Young, G.S.

[1] "Conformal Mappings and Peano Curves," *Michigan Math. J.*, *1*, 69–72 (1952).

Pólya, G.

[1] "Über eine Peanosche Kurve," *Bull. Acad. Sci. Cracovie (Sci. math. et nat. Série A) (1913)*, 1–9.

Rahm, G. de

[1] "Un peu de mathématiques apropos d'une courbe plane," *Elem. Math.*, *2*, 73–76, 89–97 (1947).

Randolph, J.F.

[1] *Basic Real and Abstract Analysis*, Academic Press, New York, 1968, pp. 365–367.

Robertson, A.G.

[1] "Multiplicativity of the Uniform Norm and Independent Functions," *Bull. Austral. Math. Soc.*, *42*, 153–155 (1990).

Rosenthal, A.

[1] "Über Peano Flächen und ihren Rand," *Mathem. Z.*, *10*, 102–104 (1921).

Rudin, W.

[1] *Principles of Mathematical Analysis*, First Ed., McGraw-Hill, New York, 1953.

Sagan, H.

[1] *Advanced Calculus*, Houghton-Mifflin Company, Boston, 1974.

[2] "Approximating Polygons for Lebesgue's and Schoenberg's Space-filling Curves," *Amer. Math. Monthly*, *93*, 361–368 (1986).

[3] "Some Reflections on the Emergence of Space-filling Curves: The Way it could have happened and should have happened, but did not happen," *Franklin J.*, *328*, 419–430 (1991).

[4] "An Elementary Proof that Schoenberg's Space-filling Curve is nowhere differentiable," *Math Mag.*, *65*, 125–128 (1992).

[5] "On the Geometrization of the Peano Curve and the Arithmetization of the Hilbert Curve," *Internat. J. Math. Ed. Sc. Tech*, *23*, 403–411 (1992).

[6] "Approximating Polygons for the Sierpiński-Knopp Curve," *Bull. Acad. Sci. Polonaise*, *40*, 19–29 (1992).

[7] "Nowhere Differentiability of Sierpiński's Space-filling Curve," *Bull. Acad. Sci. Polonaise*, *40*, 217–220 (1992).

[8] "A three-dimensional Hilbert-Curve," *Internat. J. Math. Ed. Sc. Tech.*, *24*, 541–545 (1993).

[9] "An analytic Proof of the Nowhere Differentiability of Hilbert's Space-filling Curve," *Franklin J.*, *330*, 763–766 (1993).

[10] "A Geometrization of Lebesgue's Space-filling Curve," *Math. Intelligencer*, *15*, No. 4, 37–43 (1993).

[11] "The Coordinate Functions of Sierpiński's Space-Filling Curve are Nowhere Differentiable," *Bull. Acad. Sci. Polonaise*, *41*, 73–75 (1993).

[12] "The taming of a Monster: A parametrization of the von Koch curve," *Internat. J. Math. Ed. Sc. Tech.*, to appear.

Salem, R., Zygmund, A.

[1] "Lacunary Power Series and Peano Curves," *Duke J.*, *12*, 569–578 (1945).

Schaeffer, A.C.

[1] "Power Series and Peano Curves," *Duke J.*, *21*, 383–390 (1954).

Schoenberg, I.J.

[1] "The Peano-Curve of Lebesgue," *Bull. Amer. Math. Soc.*, *44*, 519 (1938).

[2] Mathematical Time Exposures, *Math. Assoc. Amer.*, *1982*, 135–148.

[3] Personal letter to the author, 7 May 1986.

Schoenflies, A.

[1] *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 2. Teil, B.G. Teubner, Leipzig, 1908.

Sierpiński, W.

[1] "Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane," *Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. math. et nat., Série A) (1912)*, 462–478(Sierpiński[11] の pp. 52–66 を参照).

[2] "O krzywych, wypolniajacych kwadrat," *Prace matematyczno-fizyczne, XXI-II*, 193–219 (1912).

[3] "Sur une courbe non quarrable," *Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. math. et nat., Série A) (1913)*, 254–263.

[4] "O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgalezienia," *Prace Mat.-Fiz. 27*, 77–86 (1916) ("Sur une courbe dont tout point est un point de ramification" というタイトルで，フランス語に翻訳されている Sierpiński[11] の pp. 99–106 を参照).

[5] "Sur une courbe dont tout point est un point de ramification," *C.R. Acad. Sci., Paris*, *160*, 302–305 (1915).

[6] "O krivoy, soderzhashey v sebe obraz vsyakoy krivoy," *Matematichesky sbornik*, *30*, 267–287 (1916) ("Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée" というタイトルで，フランス語に翻訳されている Sierpiński[11] の pp. 107–119 を参照).

[7] "Sur une courbe cantorienne qui contient une image biuivoque et continue de toute courbe donnée," *C.R. de l'Academie des Sciences Paris*, *172*, 629–632 (1916).

[8] "Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne," *Fund. Math.*, *1*, 44–60 (1920) (Sierpiński[11] の pp. 308–321 を参照).

[9] "Remarque sur la courbe péanienne," *Wiadomości Matematyczne*, *XLII*, 1–3 (1937) (Sierpiński[12] の pp. 369–371 を参照).

[10] *Cardinal and Ordinal Numbers*, 2nd edition, Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 1965.

[11] *Oeuvres Choisies*, Tome II, Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 1975.

[12] *Oeuvres Choisies*, Tome III, Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 1976.

Stachel, H.

[1] Laudatio, *Nouvelles Mathematiques Internationales, No. 154, Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien, (August 1990)* 4–9.

Steinhaus, H.

[1] "La courbe de Peano et les fonctions indépendantes," *C.R. Acad. Sci., Paris*, *202*, 1961–1963 (1936).

Steinitz, E.

[1] "Stetigkeit und Differentialquotient," *Math. Ann.*, *52*, 59–69 (1899).

Stromberg, K., Tseng, Shiojenn

[1] "Simple plane Arcs of positive Area," *Expo. Math. 12*, (1994).

Strubecker, K.

[1] *Einführung in die höhere Mathematik*, Bd. II, R. Oldenbourg, München-Wien, 1967.

Takagi, T.

[1] "A simple example of a continuous function without derived function," *J. Phys. School. Tokyo*, *14*, 1–2 (1904).

Torhorst, M.

[1] "Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete," *Mathem. Zeitschrift*, *9*, 45–65 (1921).

Veblen, O.

[1] A system of Axioms for geometry, *Trans. Am. Math. Soc.*, *5*, 343–384 (1904).

[2] Theory of plane curves in non-metrical analysis situs, *Trans. Am. Math. Soc.*, *6*, 83–98 (1905).

Walsh, J.L.

[1] William Fogg Osgood, *Dictionary of Scientific Biography, Vol. 10*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970, pp. 244–245.

Willard, St.

[1] *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, MA., 1970, pp. 219–222.

Wirth, N.

[1] *Algorithms + Data Structures = Programs*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.

Wunderlich, W.

[1] "Irregular Curves and Functional Equations," Ganita (Proc. Benares Math. Soc.) *5*, 215–230 (1954).

[2] "Una generazione comune di diverse curve patologiche," *Atti VI Congr. U.M.I. Napoli*, 426–427 (1959).

[3] "Über Peano-Kurven," *Elem. Math.*, *28*, 1–10 (1973).

Yost, D.

[1] "Space-filling curves and universal normed spaces," *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös (Sect. Math.) 27*, 33–36 (1984).

人名索引

■あ行

■か行

■さ行

■た行

■な行

■は行

■ま行

■や行

■ら行

■わ行

事項索引

■さ行

■た行

■な行

■わ行

著　者
H. ザーガン (H. Sagan)
5004 Glen Forest Drive, Raleigh, NC 27612, USA
and
Mathematisches Institut der Universität Wien
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria

訳　者
鎌田　清一郎（かまた　せいいちろう）

九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻
修士課程修了.
九州大学大学院システム情報科学研究科助教授.
工学博士.
専門：画像工学.

空間充填曲線とフラクタル　　**定価（本体3,200円＋税）**

発　行　1998年12月22日
著　者　H. ザーガン
訳　者　鎌田　清一郎
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033　東京都文京区本郷 3丁目3番13号
TEL（03）3812-0757（営業直通）
印刷所　平河工業社

This Japanese translation is based on the English original,
H. Sagan : *Space-Filling Curves* (Universitext)
published by Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg
ISBN 0-387-94265-3

ISBN 4-431-70775-1 C3041